

مبانی ریاضیات پایه (پیش)

شامل سر فصل های ریاضیات عمومی و پیش دانشگاهی

مخصوص واحدهای دانشگاه علمی - کاربردی

مدرس: سودابه تصاعدیان

جزوه ریاضی پیش دانشگاهی - هزار زنده به وسوه

April 16, 2025 16:36

پیش فصل : مجموعه و اعداد

(۱-۰) تعاریف

(۲-۰) مجموعه های اعداد

(۳-۰) اعمال در مجموعه ها

(۴-۰) خواص اعمال در مجموعه اعداد حقیقی

فصل یک : توان و چند جمله ای ها

(۱-۱) توان و یک جمله ای ها

(۲-۱) چند جمله ای ها

فصل دو : اتحاد و تجزیه

(۱-۲) اتحادهای پرکاربرد

(۲-۲) تجزیه با استفاده از اتحادها

(۳-۲) ب.م.م یک جمله ای ها

(۴-۲) فاکتورگیری

فصل سه : معادله و نا معادله

(۱-۳) نکات اصلی در حل معادلات و نا معادلات

(۲-۳) حل معادلات و نا معادلات

(۳-۳) حل معادلات با استفاده از تجزیه

فصل چهار: رابطه و تابع

(۱-۴) رابطه و حاصل ضرب دکارتی

(۲-۴) مفهوم تابع

(۳-۴) تعیین دامنه تابع

فصل پنج : رسم نمودار برخی توابع

(۱-۵) رسم نمودار توابع درجه اول

(۲-۵) رسم نمودار توابع درجه دوم

(۳-۵) رسم نمودار توابع درجه سوم

۴-۵ رسم نمودار توابع رادیکالی

۵-۵ رسم نمودار توابع قدر مطلق

۶-۵ رسم نمودار توابع جزء صحیح

فصل شش : نکاتی در مورد تابع

۱-۶ توابع خاص

۲-۶ توابع چند ضابطه ای

۳-۶ اعمال جبری روی توابع

۴-۶ ترکیب توابع

فصل هفتم : تعیین علامت چند جمله ای ها و عبارات کسری

۱-۷ تعیین علامت دو جمله ای درجه اول

۲-۷ تعیین علامت سه جمله ای درجه دوم

۳-۷ تعیین علامت عبارات به صورت ضرب چند جمله ای

۴-۷ تعیین علامت عبارات کسری

۱-۰ تعاریف

مجموعه = گردآیه ای از اشیاء یا موجودات است که معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی نشان داده میشود. مثل مجموعه A یا S
 عنصر یا عضو = هر شیء موجود در مجموعه یک عنصر یا عضوی از آن مجموعه است که معمولاً با حروف کوچک انگلیسی نشان داده
 می شود مانند: a یا s . علامت عضویت $\in$ می باشد، مثلاً اگر a عضو مجموعه A باشد و عضو مجموعه B نباشد، به این صورت
 نوشته میشود:

$$a \in A, \quad a \notin B$$

زیرمجموعه = اگر هر عضو مجموعه S عضوی از مجموعه T نیز باشد، S را زیر مجموعه T نامند و اینگونه نمایش می دهند: $S \subset T$
 $(\forall a \in S \text{ اگر } a \in T) \Leftrightarrow S \subset T$

(علامت $\forall$ خوانده می شود: به ازای هر.)

جمله ی بالا به این شکل خوانده می شود: به ازای هر a عضو S ، اگر a عضو T باشد آنگاه S زیرمجموعه ی T است و برعکس.

۲-۰ مجموعه های اعداد

۱- مجموعه اعداد طبیعی: مجموعه اعداد طبیعی را با N نمایش می دهند.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

۲- مجموعه اعداد صحیح: مجموعه اعداد صحیح را با Z نمایش می دهند.

$$Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

۳- مجموعه اعداد گویا: مجموعه اعداد گویا را با Q نمایش می دهند.

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

تعریف = یک عدد گویا عددی است که قابل بیان به صورت نسبت دو عدد صحیح باشد. مثل تمام اعضای مجموعه اعداد طبیعی و

مجموعه اعداد صحیح، کسره های مثبت و منفی، اعشاری های مختوم مثبت و منفی (مانند: $2,35$ یا $-0,00925$) و اعشاری های

مکرر نامختوم مثبت و منفی (مانند: $\frac{1}{3} = 0,333333\dots$ یا $\frac{-61}{111} = -0,549549549\dots$)

۴- مجموعه اعداد گنگ: اعدادی که گویا نباشند را اعداد گنگ می نامند و با Q' نمایش می دهند. این اعداد در واقع اعشاری های نامکرر
 نامختوم هستند. مثل:

$$1,732\dots = \sqrt{3} \quad \text{یا عدد پی} \quad 3,14159\dots = \pi$$

۵- مجموعه اعداد حقیقی: به مجموع مجموعه های اعداد گویا و گنگ، مجموعه اعداد حقیقی گویند که با R نمایش می دهند. بنابراین:

$$R = Q \cup Q'$$

دستگاه اعداد حقیقی متشکل از مجموعه اعداد حقیقی و دو عمل جمع و ضرب می باشد. (تفریق، عمل جمعی است که یکی از اعداد آن
 منفی است و تقسیم، عمل ضربی است که یکی از اعداد آن معکوس است)

۶- مجموعه اعداد مختلط: مجموعه اعداد مختلط به شکل ذیل تعریف می گردد:

$$C = \{a+ib \mid a, b \in R, i=\sqrt{-1}\}$$

چون معادله $x^2 + 1 = 0$ در دستگاه اعداد حقیقی جواب ندارد، ناچار دستگاه دیگری ابداع شد که معادلاتی نظیر این معادله در آن
 جواب دارد که به آن دستگاه اعداد مختلط گویند که در آن:

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

$$\forall a > 0 \Rightarrow \sqrt{(-a)} = \sqrt{(-1)a} = \sqrt{i^2 a} = i\sqrt{a}$$

نکته : با توجه به تعاریف فوق ، رابطه ذیل بین مجموعه های اعداد ذکر شده همواره برقرار است :

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

۳-۰ اعمال در مجموعه ها

تساوی = دو مجموعه A و B را مساوی می گویند و می نویسند $A=B$, اگر آنها عناصر یکسانی داشته باشند .
اجتماع = اجتماع دو مجموعه A و B یعنی مجموعه ی تمام عناصری که یا در A یا در B وجود دارند و با نماد $A \cup B$ نشان می دهند.

اشتراک = اشتراک دو مجموعه A و B یعنی مجموعه ی تمام عناصری که هم در A و هم در B وجود دارند و با نماد $A \cap B$ نشان می دهند.

مجموعه تهی = مجموعه ای که شامل عنصری نباشد را مجموعه تهی می نامند و با علامت $\emptyset$ نمایش می دهند .
مثال ۱ : اگر A و B و C به شکل ذیل باشند , مجموعه های اشتراک و اجتماع آنها را بنویسید.

$$C = \{2, 10\} \quad B = \{1, 4, 9, 16\} \quad A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

توجه : اگر S زیر مجموعه T باشد , روابط ذیل همواره برقرار است :

$$S \cup T = T \quad \text{و} \quad S \cap T = S$$

توجه: تعداد زیر مجموعه های هر مجموعه که n عضو دارد برابر است با 2^n , که شامل خود مجموعه و مجموعه تهی نیز می باشد.

مثال ۲ : تمام زیر مجموعه های مجموعه A را بنویسید . $A = \{2, 4, 6\}$

مجموعه مرجع (جهانی یا عمومی) = در یک بحث معین , تمام عضوهای مجموعه های مورد مطالعه متعلق به مجموعه ای به نام مجموعه مرجع است و با M نشان می دهیم.

پایان مطلب دوم ریاضی پیشرفته

۵-۰ خواص اعمال در مجموعه اعداد حقیقی

الف) عمل جمع :

۱- بسته بودن مجموعه R :

$$\forall a, b \in R : a+b \in R$$

۲- خاصیت جابه جایی :

$$\forall a, b \in R : a+b = b+a$$

۳- شرکت پذیری :

$$\forall a, b, c \in R : (a+b) + c = a + (b+c)$$

۴- عنصر خنثی :

$$\forall a \in R : a+0 = 0+a = a$$

۵- وجود عنصر قرینه :

$$\forall a \in R : a+(-a) = -a+a = 0$$

۶- قرینه ی قرینه ی هر عدد حقیقی , مساوی با خود آن عدد است :

$$\forall a \in R : -(-a) = a$$

۷- قرینه ی مجموع دو عدد حقیقی ، مساوی است با مجموع قرینه آنها :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : -(a+b) = -a+(-b)$$

۸- جمع علامت ها :

اگر دو عدد حقیقی هم علامت باشند با هم جمع شده ، علامت مشترک را برای عدد بدست آمده در نظر می گیریم .
اگر دو عدد حقیقی مختلف علامت باشند ، از هم کم شده ، علامت عدد بزرگتر را برای حاصل تفریق در نظر می گیریم .
الف) عمل ضرب :

۱- بسته بودن مجموعه $\mathbb{R}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : ab \in \mathbb{R}$$

۲- خاصیت جابه جایی :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : ab = ba$$

۳- شرکت پذیری :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (ab)c = a(bc)$$

۴- عنصر خنثی :

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \times 1 = 1 \times a = a$$

۵- وجود عنصر معکوس (یا وارون) :

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$$

۶- توزیع پذیری ضرب نسبت به عمل جمع :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a(b+c) = ab+ac \\ (a+b)c = ac+bc \end{cases}$$

۷- حاصل ضرب هر عدد حقیقی در صفر مساوی است با صفر :

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \times 0 = 0 \times a = 0$$

۸- وارون وارون هر عدد حقیقی مساوی است با خود آن عدد :

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

۹- حاصل ضرب وارون های دو عدد مخالف صفر، مساوی است با وارون حاصل ضرب آنها :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0 : \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$$

۱۰- ضرب علامت ها :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a(-b) = -ab \\ (-a)b = -ab \\ (-a)(-b) = ab \end{cases}$$

فصل اول (توان و چند جمله ای ها)

۱-۱) توان و یک جمله ای

هر یک جمله ای از چهار جزء تشکیل شده است :

۱- اعداد (از مجموعه اعداد حقیقی)

۲- متغیرها (مثل x, y, z, Q, P و غیره)

۳- علائم (علامت های جمع، ضرب، منفی و تقسیم)

۴- توان (برای اعداد یا متغیرها یا هر دو)

مثلا $2x^{-5}$ یا $-1/3y^3x$ یا $\frac{11xz}{-33}$ یا $0.47Q$

تعریف یک جمله ای :

تعریف ۱. اگر a یک عدد حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آن گاه a^n را توان n ام a نامیده و به صورت $a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_n$ تعریف می کنیم. a را پایه و n را توان یا نما نامیم.

تعریف ۲. ax^n یک جمله ای بر حسب x از درجه n است که در آن a یک عدد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی است. a را ضریب عددی و x را متغیر می نامیم.

ضرب و تقسیم اعداد توان دار

اگر a و b دو عدد حقیقی و m و n اعداد طبیعی باشند، آن گاه

برای ضرب اعداد توان دار دو حالت داریم

پایه ها مساوی: در این حالت یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را جمع می کنیم:	}
یعنی $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	
توان ها مساوی: در این حالت پایه ها را ضرب کرده و یکی از توان ها را می نویسیم:	
یعنی $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	

تقسیم اعداد توان دار نیز دو حالت داریم

پایه ها مساوی: در این حالت یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم:	}
یعنی $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ که $a \neq 0$	
توان ها مساوی: در این حالت پایه ها را تقسیم کرده و یکی از توان ها را می نویسیم:	
یعنی $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ که $b \neq 0$	

نکات:

$$a^1 = a \quad (\text{آ})$$

$$a^0 = 1 \quad (\text{ب}) \quad \text{که } a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (\text{ج})$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{د}) \quad \text{که } a \neq 0$$

تعریف ۳. یک جمله ای هایی که متغیرها و توان متناظر آن ها یکسان است، متشابه می نامیم: به عنوان مثال $2xy^2$ و $\sqrt{5}xy^2$ یک جمله ای های متشابه هستند.

اعمال جبری روی یک جمله‌ای‌ها

* جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها. یک جمله‌ای‌های متشابه را می‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

$$\text{مثال ۴.} \quad -7x^2 + x^2 = -6x^2 \quad , \quad 3xyz - 4xyz - xyz = -2xyz$$

* ضرب یک جمله‌ای‌ها. برای ضرب یک جمله‌ای‌ها، ضرایب عددی را در هم ضرب کرده و متغیرها را نیز با توجه به قواعد ضرب اعداد توان‌دار ضرب می‌کنیم.

$$\text{مثال ۵.} \quad -2xy \cdot 7x^2z = -14x^2yz \quad , \quad 3x^2y \cdot 5xy^2 = 15x^3y^3$$

$$(a^2)^5 \cdot a = a^{10} \cdot a = a^{11} \quad , \quad (b^2)^5 \cdot (b^2)^2 = b^{10} \cdot b^4 = b^{14}$$

تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای: در این نوع تقسیم ابتدا ضرایب عددی را ساده کرده و در مورد متغیرها از

قاعده زیر پیروی می‌کنیم. ($x \neq 0$)

$$\begin{cases} \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} & m > n \\ \frac{x^m}{x^n} = 1 & m = n \\ \frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}} & m < n \end{cases}$$

بیان ساده قاعده بالا به این ترتیب است که پایه‌ها را هر جا که توان متغیر بیشتر است (صورت یا مخرج) قرار داده، سپس توان‌ها را تفریق معمولی می‌کنیم.

به عنوان مثال برای انجام تقسیم $\frac{3x^2y^4}{2xy^2}$ ابتدا ضرایب را ساده کرده، سپس بین x^2 و x چون توان x^2 بیشتر است، x را در صورت نوشته و توان آن $2 - 1 = 1$ می‌شود؛ همچنین بین y^4 و y^2 ، توان y^4 در مخرج بیشتر است، بنابراین y را در مخرج نوشته و توان آن برابر با $2 - 2 = 0$ خواهد شد؛ لذا حاصل این تقسیم $\frac{3x^1}{2y^0}$ می‌شود.

$$\text{مثال ۶.} \quad \frac{3x^2y^4}{2xy^2} = \frac{3x^1}{2y^0} \quad , \quad \frac{-5a^3b^2}{-10ab} = \frac{a^2b^1}{2} \quad , \quad \frac{-4abc^2}{12a^2b^2} = \frac{-c^1}{3a^1b^1}$$

$$\frac{4x^2y^2}{-2xy^2z^2} = \frac{-2x^1}{yz^2} \quad , \quad \frac{x^1yz}{x^2yz^2} = \frac{1}{xz^1} \quad , \quad \frac{4ab^2c^1}{-2a^2bc} = \frac{-b^1c}{a^1}$$

۱-۲) چند جمله‌ای‌ها

تعریف چند جمله‌ای = چند جمله‌ای عبارتست از مجموع چند یک جمله‌ای غیرمتشابه.

هر جمله بوسیله علامت جمع یعنی + یا علامت تفریق یعنی - از جمله‌ی دیگر متمایز می‌گردد.

مثلاً $2 + 3x$ ، یک دو جمله‌ای است که $3x$ یک جمله و 2 جمله‌ی دوم آن است که بوسیله علامت جمع از هم تفکیک شده‌اند. یا

$-10 - 5y + \frac{x}{3}$ یک سه جمله ای است که جملات آن عبارتند از: " $-5y$ " و " $+\frac{x}{3}$ " و " -10 ".

متغیرها دارای توان ۱، ۲ یا بالاتر هستند، اما توان ۱ نوشته نمی شود. مثلاً در مثال فوق، توان x ، ۱ و توان y نیز ۱ می باشد.

*تمرین: عبارت $2x^{-5} - \frac{11xz}{-33} - 1/3y^3x + 0.47Q$ چند جمله ای است؟ چه متغیرهایی دارد؟ توان متغیرهای هر جمله چند است؟

نکته ۱: عبارت ضرب در چند جمله ای ها اغلب نوشته نمی شود. این زمانی است که یک متغیر در عدد یا متغیر دیگری ضرب شده باشد. مثلاً به جای $x \times y$ نوشته می شود xy یا به جای $x \times 5$ نوشته می شود $5x$.

نکته ۲: به عددی که در متغیر ضرب می شود، ضریب آن متغیر گفته می شود. مثلاً در جمله $5x$ ، ۵ ضریب x است یا در جمله $-1/3y^3x$ ، منفی یک سوم $(-1/3)$ هم ضریب x و هم ضریب y^3 می باشد.

نکته ۳: در چند جمله ای ها، معمولاً تقسیم به صورت کسر نمایش داده می شود. مثلاً به جای $x \div 2$ می نویسیم $\frac{1}{2}x$ یا $\frac{x}{2}$.

نکته ۴: چون حاصل ضرب هر عدد در ۱ خود همان عدد می شود، ضریب ۱ متغیرها نوشته نمی شود. پس اگر در جمله ای عددی در متغیر ضرب نشده بود، ضریب متغیر ۱ می باشد.

نکته ۵: هر عدد یا متغیری که در یک کسر ضرب شود، تنها در صورت کسر ضرب می شود نه مخرج آن.

نکته ۶: یک چند جمله ای می تواند دارای ۱، ۲ یا بیشتر، متغیر باشد. مثلاً عبارت تمرین ۳ یک چهارجمله ای ۴ متغیره، دارای ۴ متغیر x, y, z و Q می باشد. اما عبارت $-7 + 5x - 0.25x^4$ یک سه جمله ای یک متغیره است که تنها دارای یک متغیر x است.

نکته ۷: به بزرگترین توان متغیر در هر چند جمله ای، درجه ی آن چند جمله ای بر حسب آن متغیر می گویند. مثلاً سه جمله ای $-7 + 5x - 0.25x^4$ ، یک سه جمله ای درجه ۴ بر حسب x است و عبارت $1/2y^3x - 7x^{-5}$ ، یک دو جمله ای درجه ۵ بر حسب x و یک دو جمله ای درجه ۳ بر حسب y است.

ترتیب اعمال ۴ عمل اصلی

برای حل یک عبارت محاسباتی باید این ترتیب رعایت شود: پرانتز، توان، ضرب و تقسیم، جمع و تفریق

مثال: $5 = 7 + 2(-1) = 7 - 2 = 5$. یعنی ابتدا داخل پرانتز محاسبه می شود یعنی ۲ از ۱ کم میشود که جواب منفی یک است، سپس توان اعمال می گردد یعنی منفی یک به توان ۳ می رسد که همان منفی یک می شود، بعد عمل ضرب موجود انجام می گیرد یعنی ۲ در منفی یک ضرب می شود که جواب منفی ۲ است، آنگاه عمل جمع صورت می پذیرد، یعنی منفی ۲ با ۷ جمع می شود که حاصل عدد ۵ است.

مثال: $35 = 36 - 1 = 1 - (1+5) = 1 - 6 = -5$

در این ترتیب اعمال ضرب و تقسیم بر هم تقدم یا تأخر ندارند و در یک رتبه برای محاسبه قرار دارند، همینطور برای جمع و تفریق. برای همین اگر به عبارتی برخوردیم که ضرب و تقسیم هر دو وجود داشت و تقدم با پرانتز مشخص نشده بود، برای محاسبه از چپ به راست عمل می کنیم؛ به عبارت دیگر تقدم در این حالت با عمل سمت چپ است.

برای روشن تر شدن این مطلب به مثال های ذیل توجه کنید:

مثال: حاصل عبارت $2 \times 5 \div 15$ را بدست آورید.

حل با رعایت حق تقدم های ذکر شده (یعنی اول تقسیم که سمت چپ قرار دارد و بعد ضرب) عبارت است از: $2 \times 5 \div 15 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

اما اگر این حق تقدم رعایت نگردد (یعنی اول ضرب را انجام دهیم، آنگاه تقسیم)، پاسخ غلط حاصل می شود: $2 \times 5 \div 15 = 10 \div 15 = \frac{2}{3}$

مثال: روش صحیح محاسبه $140 = 14 \times 10 = 28 \div 2 \times 10 = 4 \times 7 \div 10 \times 2$

روش غلط محاسبه =

$1/4 = 28 \div 20 = 4 \times 7 \div 10 \times 2$

تعریف ۷. مجموع چند یک جمله‌ای غیر متشابه را، چند جمله‌ای گوئیم؛ به عنوان مثال $x^2 - 2x$ یک دو جمله‌ای و $1 + 2a^5 - 7b^2a$ یک سه جمله‌ای است.

اعمال جبری روی چندجمله‌ای‌ها

* برای جمع و تفریق چندجمله‌ای‌ها، جملات متشابه را جدا و با هم ساده می‌کنیم.

مثال ۸. $7x^2 + 2x - 4x - x^2 + 3x = (7x^2 - x^2) + (2x - 4x + 3x) = 6x^2 + x$

$$3xy^2 + 7xy - 5xy^2 + 2xy = (3xy^2 - 5xy^2) + (7xy + 2xy) = -2xy^2 + 9xy$$

* برای ضرب چند جمله‌ای‌ها دو حالت اتفاق می‌افتد؛ ضرب یک جمله‌ای در چندجمله‌ای و ضرب چندجمله‌ای در چندجمله‌ای. می‌دانیم که برای هر سه عدد a, b, c رابطه $a(b+c) = ab+ac$ همواره برقرار است. در ضرب یک جمله‌ای در چندجمله‌ای نیز دقیقاً همین خاصیت به کار می‌رود؛ یعنی یک جمله‌ای در تک تک جملات چندجمله‌ای ضرب می‌شود.

مثال ۹. $3x^2(2x^2 - x + 5) = 6x^4 - 3x^3 + 15x^2$

$$-2xy(x^2y + 2x - 3y^2) = -2x^3y^2 - 4x^2y + 6xy^3$$

خاصیت دیگری که برای اعداد a, b, c, d داریم، رابطه $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ است که برای ضرب چندجمله‌ای در چندجمله‌ای‌ها نیز به کار می‌رود؛ در این روش هر کدام از جملات پراتر اول در تک تک جملات پراتر دوم ضرب می‌شود. باید توجه داشت که پس از ضرب عبارات، چنانچه جملات مشابهی به دست آید، باید ساده شوند.

مثال ۱۰. $(x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$$(3x - 7)(x^2 - 2x - 5) = 3x^3 - 6x^2 - 15x - 7x^2 + 14x + 35 = 3x^3 - 13x^2 - x + 35$$

$$(7xy - 2x^2 - 1)(x^2y - 3y) = 7x^3y^2 - 21xy^2 - 2x^2y + 6x^2y - x^2y + 3y = 7x^3y^2 - 15xy^2 - 2x^2y + 3y$$

* در تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یک جمله‌ای نیز از قاعده تفکیک برای اعداد به صورت $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ استفاده می‌شود.

مثال ۱۱. $\frac{a^5 - 2a^3 + 1}{a} = a^4 - 2a^2 + \frac{1}{a}$

$$\frac{8a^5b^2 - 4a^2b^3 + 2ab^5}{2ab^2} = -2a^3b + 2a - b^3$$

$$\frac{18x^5y^2z^3 + 2x^5y^2z^2 - 7x^4yz^3 - 2xyz^3}{2xyz^2} = 9x^4y + x^4y^0z - 3xz^0 - 1$$

$$\frac{3x^5y^2 - 4xy^2 + x^2y^3 - 5x}{\frac{1}{2}x^2y - \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{4}xy^2 - \frac{5}{2}xy} = \frac{6x^5y^2 - 8xy^2 + 2x^2y^3 - 10x}{x^2y - \frac{4}{3}y^2 + \frac{1}{2}xy^2 - 5xy}$$

۱.۲ اتحادهای پر کاربرد

اتحادهای جبری روابطی هستند که همواره درست بوده و کاربرد آنها انجام محاسبات ریاضی را سرعت می دهد؛
مهمترین این اتحادها را در زیر می بینید.

(۱) اتحاد مربع دو جمله ای

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(۲) اتحاد مزدوج

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

(۳) اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

(۴) اتحاد مربع سه جمله ای

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

(۵) اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

(۶) اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال از اتحاد (۱).

$$(x+2)^2 = x^2 + 2(x)(2) + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$(x-5)^2 = x^2 - 2(x)(5) + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$(2x-y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(y) + y^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$$

$$(5a+3b)^2 = (5a)^2 + 2(5a)(3b) + (3b)^2 = 25a^2 + 30ab + 9b^2$$

مثال از اتحاد (۲).

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

$$(x+2y)(x-2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$$

$$(2a-3b)(2a+3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$$

$$(4a^2-3b^2)(4a^2+3b^2) = (4a^2)^2 - (3b^2)^2 = 16a^4 - 9b^4$$

مثال از اتحاد (۲).

$$(x + 2)(x + 2) = x^2 + (2 + 2)x + (2)(2) = x^2 + 4x + 4$$

$$(a - 1)(a + 2) = a^2 + (-1 + 2)a + (-1)(2) = a^2 + a - 2$$

$$(x - 4)(x - 5) = x^2 + (-4 - 5)x + (-4)(-5) = x^2 - 9x + 20$$

$$(3a - 1)(3a + 4) = (3a)^2 + (-1 + 4)(3a) + (-1)(4) = 9a^2 + 9a - 4$$

مثال از اتحاد (۴).

$$(x + y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 1^2 + 2(x)(y) + 2(y)(-1) + 2(x)(-1) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2y - 2x$$

$$(2x - y - 3z)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + (-3z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(-3z) + 2(2x)(-3z)$$

$$= 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 6yz - 12xz$$

مثال از اتحاد (۵).

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1^3 = x^3 + 1$$

بکسر
 $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) = a^3 - 2^3 = a^3 - 8$

$$(2y - 3x)(4y^2 + 6xy + 9x^2) = (2y)^3 - (3x)^3 = 8y^3 - 27x^3$$

$$(5a + b)(25a^2 - 5ab + b^2) = (5a)^3 + b^3 = 125a^3 + b^3$$

مثال از اتحاد (۶).

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2(x^2)(1) + 2(x)(1^2) + 1^2 = x^2 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$(y - 2)^2 = y^2 - 2(y^2)(2) + 2(y)(2^2) - 2^2 = y^2 - 4y^2 + 8y - 4$$

$$(3x + y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)^2(y) + 2(3x)(y)^2 + y^2 = 9x^2 + 12x^2y + 6xy^2 + y^2$$

$$(2x - 5y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)^2(5y) + 2(2x)(5y)^2 - (5y)^2 = 4x^2 - 20x^2y + 50xy^2 - 25y^2$$

۲.۲ تجزیه با استفاده از اتحادها

تجزیه یکی از ابزار بسیار سودمند در ریاضیات عمومی است. در بخش قبل با چند اتحاد جبری آشنا شدیم؛ حال به بیان چگونگی تجزیه با برخی از این اتحادهای پرکاربرد می‌پردازیم.

• تجزیه با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای. به مشخصه‌های اتحاد $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ در سمت راست دقت کنید. ۱. سه جمله دارد که دو جمله آن مربع کامل بوده و همیشه مثبت هستند، ۲. جمله وسط دو برابر جذر دو جمله دیگر است و علامت آن همان علامت بین جملات درون پرانتز است. عبارت معادل با این جملات در سمت چپ، یک پرانتز با توان ۲ است که داخل آن جذر دو جمله مربع قرار دارد و علامت بین جملات درون پرانتز همان‌طور که گفته شد، با علامت $2ab$ یکی است.

به این مثال توجه کنید: $x^2 + 8x + 16$. این عبارت دارای سه جمله است که x^2 و 4^2 مربع کامل هستند؛ جذر این دو جمله یعنی x و ۴ ضرب در ۲ برابر $8x$ می‌شود که همان جمله وسط است. لذا تجزیه این عبارت به صورت $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$ خواهد بود.

$$\text{مثال ۱.} \quad a^2 + 10a^2 + 25 = (a^2 + 5)^2 \quad x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$16a^2 + 8a^2b^2 + b^2 = (4a^2 + b^2)^2 \quad 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$$

• تجزیه با استفاده از اتحاد مزدوج. مشخصه‌های اتحاد $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ در سمت راست به این ترتیب است: ۱. دو جمله مربع کامل دارد، ۲. بین این دو جمله همیشه علامت منها قرار دارد. به عبارت معادل با این جملات در سمت چپ توجه کنید؛ دو پرانتز که درون هر دو جذر جملات سمت راست قرار گرفته و علامت بین جملات در یکی از پرانتزها منها و در دیگری به علاوه است.

به این مثال توجه کنید: $x^2 - 25$. در این عبارت دو جمله مربع کامل، یعنی x^2 و 5^2 داریم که بین آنها علامت منها قرار دارد. بنا به توضیحات بالا، با تجزیه از اتحاد مزدوج دو پرانتز خواهیم داشت که جذر جملات بالا، یعنی x و ۵ با علامت منها و به علاوه بین جملات مذکور، درون پرانتزها قرار می‌گیرد. لذا تجزیه عبارت داده شده به صورت، $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$ است.

$$\text{مثال ۲.} \quad 4x^2 - y^2 = (2x^2 + y)(2x^2 - y), \quad a^2 - 81 = (a^2 + 9)(a^2 - 9), \quad x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

$$16x^2 - 64y^2 = (4x - 8y^2)(4x + 8y^2), \quad 9x^2 - 49 = (3x + 7)(3x - 7), \quad a^3 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1),$$

• تجزیه با استفاده از اتحاد جمله مشترک. مشخصه‌های اتحاد $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ در سمت راست عبارت است از ۱. یکی از جملات مربع کامل است، ۲. ضریب x مجموع دو مقدار a و b است که حاصل ضرب آن‌ها جمله سوم یعنی ab را تشکیل می‌دهد. حال به عبارت معادل با این سه جمله‌ای در سمت چپ نگاه کنید؛ دو پراتز که درون هر دو جذر جمله مربع در سمت راست و نیز a و b که دارای مشخصه‌های مذکور باشند، قرار گرفته است.

به این مثال دقت کنید؛ $x^2 - 5x + 6$. این عبارت متشکل از سه جمله بوده و یکی از جملات یعنی x^2 مربع کامل است. باید دو عدد پیدا کنیم که مجموع آن‌ها -5 یعنی ضریب x و ضرب آن‌ها $+6$ باشد؛ به سادگی می‌بینید که -2 و -3 اعداد موردنظر ما هستند. لذا تجزیه عبارت داده شده به صورت $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ است.

مثال ۳. $x^2 + 2x^2 - 63 = (x^2 + 9)(x^2 - 7)$ $a^2 + 7a + 6 = (a+6)(a+1)$

$x^2 - x - 30 = (x-6)(x+5)$ $a^2 + a^2 - 72 = (a^2 + 9)(a^2 - 8)$

$4x^2 - 10x + 4 = (2x-1)(2x-4)$ $a^2 - 7a + 12 = (a-3)(a-4)$

• تجزیه با استفاده از اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله. با دقت به سمت راست اتحاد

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$ توجه کنید. مشخصه‌های آن به این ترتیب است؛ ۱. دو جمله مکعب دارد؛ ۲.

بین این جملات علامت منها یا به علاوه قرار دارد. حال به عبارت معادل با این جملات در سمت چپ دقت کنید؛ دو پراتز که درون اولی ریشه سوم دو جمله مکعب سمت راست قرار دارد و علامت بین آن‌ها نیز همان علامت بین جملات در سمت راست است. پراتز دوم با توجه به پراتز اول ساخته می‌شود؛ به این ترتیب که مربع جملات درون اولین پراتز با علامت مثبت و حاصل ضرب جملات آن با علامت مخالف، سه جمله این پراتز را تشکیل می‌دهد.

حال به این مثال توجه کنید؛ $x^3 - 8$. عبارتی با دو جمله که x^3 و 2^3 مکعب هستند، داریم. تجزیه این دو جمله به صورت دو پراتز است که در پراتز اول ریشه سوم مکعبات، یعنی x و 2 با علامت منها بین آن‌ها و درون پراتز دوم با توجه به آن چه در بالا گفته شد، $x^2 + 2x + 4$ خواهیم داشت. لذا $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

مثال ۴. $a^2 - 27 = (a-3)(a^2 + 3a + 9)$ $x^2 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$8a^2 - 125 = (2a-5)(4a^2 + 10a + 25)$ $x^2 + 64y^2 = (x+4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$

۳.۲ ب.م.م یک جمله‌ای‌ها

به یاد دارید که بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) اعداد به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول مشترک با کمترین توان تعریف می‌شود؛ این قاعده برای یک جمله‌ای‌ها نیز برقرار است. به عنوان مثال، برای به دست آوردن ب.م.م دو یک جمله‌ای $2x^2y^3$ و $10xz^6$ ابتدا بین ضرایب عددی ۲ و ۱۰ ب.م.م می‌گیریم که برابر ۲ می‌شود؛ سپس بین متغیرها، متغیر مشترک با کمترین توان را در نظر می‌گیریم که x^1 است. در نتیجه، ب.م.م یک جمله‌ای‌های داده شده $2x$ خواهد بود.

مثال ۵.

$$16a^2bc^3, 8abc^5 \implies \text{ب.م.م} = 8abc^3$$

$$2x^5yz, 2x^4 \implies \text{ب.م.م} = 2x^4$$

$$15xyz, 7x^2 \implies \text{ب.م.م} = x$$

$$3a^2b, 4xy^2 \implies \text{ب.م.م} = 1$$

۱.۴ رابطه و حاصل ضرب دکارتی

در صفحه هر نقطه با یک مختصات و هر مختصات با یک نقطه نمایش داده می شود.

تعریف ۱. به زوج هایی مانند (x_0, y_0) در صفحه که ترتیب در نوشتن آن ها مهم است، زوج مرتب گوئیم.

مثال ۲. با استفاده از مجموعه $A = \{2, 0, 7, 9\}$ (الف) همه زوج هایی که طول و عرض آن ها مساوی است، (ب) همه زوج هایی که عرض آن ها دو واحد از طولشان کمتر است، بنویسید.

حل. (الف) $\{(2, 2), (0, 0), (7, 7), (9, 9)\}$ (ب) $\{(2, 0), (9, 7)\}$

(*) مجموعه ای از زوج های مرتب، رابطه نامیده می شود. در مثال قبل، هر دو مجموعه (الف) و (ب) رابطه هستند.

تعریف ۳. حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A و B را با $A \times B$ نشان داده و تعریف می کنیم

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

مثال ۴. اگر $M = \{2, 6\}$ و $K = \{4, 8, 2\}$ باشد، حاصل ضرب دکارتی $M \times K$ و $K \times M$ را به دست آورید.

حل.

$$M \times K = \{(2, 4), (6, 4), (2, 8), (6, 8), (2, 2), (6, 2)\}$$

$$K \times M = \{(4, 2), (4, 6), (8, 2), (8, 6), (2, 2), (2, 6)\}$$

تعریف ۵. به هر زیرمجموعه از یک حاصل ضرب دکارتی، رابطه گفته می شود. به عنوان نمونه، $R = \{(2, 4), (2, 2), (6, 2)\} \subseteq M \times K$ در مثال بالا یک رابطه است. همان طور که می بینید این تعریف از رابطه با تعریف (*) یکی است.

مثال ۶. با توجه به $K \times M$ در مثال قبل، رابطه ای که در آن مختص های اول از مختص های دوم بیشتر است، بنویسید.

$$R = \{(4, 2), (8, 2), (8, 6)\}$$

۱.۳ نکات اصلی در حل معادلات و نامعادلات

تعریف ۱. معادله یک مجهولی، یک تساوی با یک متغیر است و مقادیری از دامنه که به ازای آن‌ها تساوی برقرار باشد، جواب یا ریشه‌های معادله گفته می‌شوند. به عنوان مثال، $3x + 2 = 5x - 1$ و $-7x^2 + 3x - 4 = 0$ معادلات یک مجهولی از درجه یک و دو هستند. همچنین نامساوی‌های دارای متغیر را نامعادله گوییم؛ $4x < 2x + 6$ و $1 < 8x - 1 \leq 5$ دو نامعادله هستند. مجموعه مقادیری که نامعادله به ازای آن‌ها درست باشد، جواب نامعادله است.

به نکات کلی زیر که از اهمیت و کاربرد فراوانی در حل معادلات و نامعادلات برخوردار هستند، توجه کنید.

(i) اگر به دو طرف یک معادله عبارتی جبری را اضافه یا از دو طرف آن عبارتی جبری را کم کنیم، جواب‌های معادله تغییری نمی‌کند. همچنین اگر دو طرف یک معادله را در عددی غیر صفر ضرب یا بر عددی غیر صفر تقسیم کنیم، تغییری در جواب‌ها حاصل نمی‌شود.

(ii) اگر از دو طرف یک نامعادله عددی را کم یا به دو طرف عددی را اضافه کنیم، مجموعه جواب نامعادله تغییری نمی‌کند.

(iii) اگر دو طرف یک نامعادله را در عددی مثبت و غیر صفر ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، جهت نامعادله و مجموعه جواب آن تغییری نمی‌کند. ولی اگر دو طرف یک نامعادله را در عددی منفی و غیر صفر ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، جهت نامعادله عوض می‌شود.

(v) در معادلات و نامعادلات می‌توان جملات مساوی را از دو طرف حذف نمود. همچنین اگر جمله‌ای را از یک طرف به طرف دیگر منتقل کنیم، علامت آن جمله عوض می‌شود.

در این بخش ابتدا به حل معادلات و نامعادلات یک مجهولی درجه اول می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا دو طرف تساوی یا نامساوی را ساده کرده، سپس جملات مشابه را با تغییر علامت به یک طرف تساوی برده و با استفاده از نکات گفته شده در بالا، معادله یا نامعادله را حل می‌کنیم.

$$2x^3 - x^2 + x = x(2x^2 - x + 1)$$

از این فاکتور می گیریم و داریم:

عبارت $2x^2 - x + 1$ را دیگر نمی توان تجزیه کرد و همان عبارت اخیر جواب این مسئله است.

مثال سوم تجزیه اتحاد ها

عبارت $8x^3 + 27y^3 + 125z^3 - 60xyz$ را تجزیه کنید.

حل: این عبارت به فرم $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ است که در آن، $a = 2x$ ، $b = 3y$ و $c = 5z$ می توانیم از اتحاد زیر استفاده کنیم:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 8x^3 + 27y^3 + 125z^3 - 60xyz &= (2x + 3y + 5z)[(2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 - 2x \cdot 3y - 3y \cdot 5z - 2x \cdot 5z] \\ &= (2x + 3y + 5z)(4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 6xy - 15yz - 10xz) \end{aligned}$$

مثال چهارم تجزیه اتحاد ها

عبارت $25x^2 + 16y^2 + 9z^2 - 40xy + 24yz - 30zx$ را تجزیه کنید.

حل: این اتحاد به فرم $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ است که در آن، $a = 5x$ ، $b = -4y$ و $c = -3z$ است.

از اتحاد زیر استفاده می کنیم:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

و خواهیم داشت:

$$(5x - 4y - 3z)^2 = 25x^2 + 16y^2 + 9z^2 - 40xy + 24yz - 30zx$$

کلید

تبلیغات همکاری با ما تماس با ما

جستجوی مطالب ...

$$(5x - 4y - 3z)^2$$

فرادرس

🏠 ≡

$$3a(a^2 - 4) - 7(a^2 - 4)$$

بگیریم

$$3a(a^2 - 4) - 7(a^2 - 4) = (a^2 - 4)(3a - 7)$$

حل: از $(a^2 - 4)$ فاکتور می گیریم و داریم:

$$(a^2 - 4)(3a - 7) = (a - 2)(a + 2)(3a - 7)$$

روی تمام آموزش های فرادرس ۶۰ درصد تخفیف بگیرید!

فرادرس - آموزش میپل Maple

$$1) 12x^3 + 120p^3 = ?$$

$$2) 3m^4 - 3m^3 - 36m^2 = ?$$

$$3) m^4 + m^2 - 20 = ?$$

فیلم آموزش ریاضی - پایه نهم

April 16, 2025 16:38

در این بخش، مثال‌های متنوعی از تجزیه اتحادها را بیان خواهیم کرد.

مثال اول تجزیه اتحاد ها ①

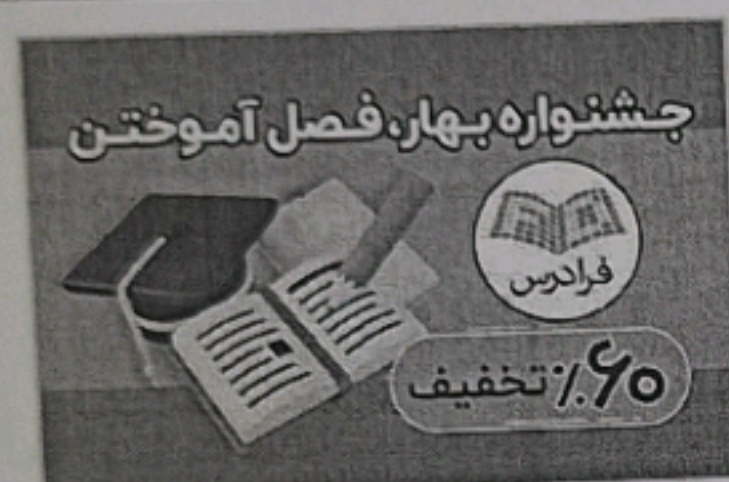
عبارت زیر را به کمک اتحادها تجزیه کنید:

$$x^2 + 9y^2 - 25m^2 - 16n^2 + 16xy + 40mn$$

حل: با توجه به شکل این عبارت، باید جملاتی با متغیرهای دوتایی را مشخص کنیم. بدین منظور جملاتی که شامل x یا y هستند را در کنار هم و جملاتی که m یا n دارند را در کنار هم می‌آوریم و داریم:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 25m^2 + 40mn - 16n^2$$

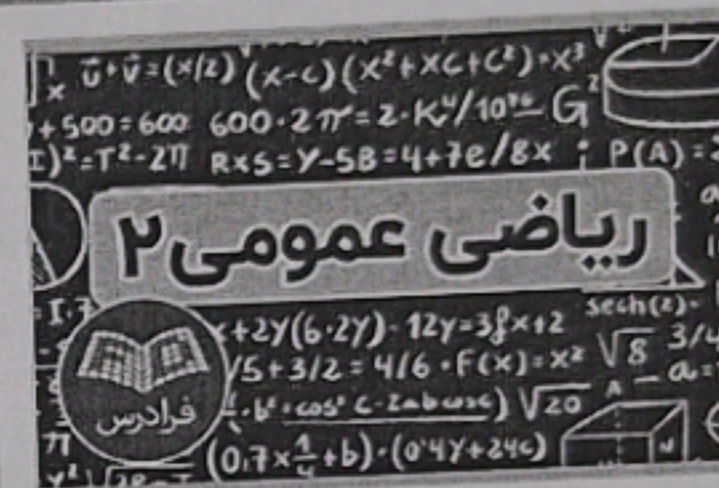
آموزش‌های پیشنهادی



جشنواره بهار، فصل آموختن، با ۶۰ درصد تخفیف ویژه!



فرادرس - آموزش توپولوژی عمومی



فرادرس - آموزش ریاضی عمومی ۲

جملات را می‌توان این‌گونه جدا کرد:

$$(x^2 + 6xy + 9y^2) - (25m^2 - 40mn + 16n^2)$$

که با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$(x + 3y)^2 - (5m - 4n)^2$$

اکنون یک عبارت به فرم $a^2 - b^2$ داریم، که $a = x + 3y$ و $b = 5m - 4n$. در این حالت، می‌توانیم از اتحاد مزدوج استفاده کنیم:

$$[(x + 3y) + (5m - 4n)][(x + 3y) - (5m - 4n)]$$

و در نهایت، با ساده کرده عبارت‌های درون کروشه‌ها، خواهیم داشت:

$$(x + 3y + 5m - 4n)(x + 3y - 5m + 4n)$$

مثال دوم تجزیه اتحاد ها ②

عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$2x^3 - x^2 + x$$

فیلم آموزش ریاضی پایه دانشگاهی

۲

می‌بینیم که یک عبارت جبری که به صورت مجموع جملات جبری بود، به شکل ضرب دو چندجمله‌ای نوشته شده است.

اما علاوه بر موارد ساده‌ای مانند فاکتورگیری، اتحادها نقش بسیار مهمی در تجزیه عبارت‌های جبری دارند. برای مثال، عبارت جبری $x^2 + 2xy + y^2$ با کمک اتحادها (در ادامه مهم‌ترینشان را معرفی می‌کنیم) به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = (x + y)(x + y)$$

در این آموزش، با تأکید بر کاربرد اتحادهای جبری، تجزیه اتحادها را با مثال‌های متنوعی بررسی می‌کنیم. در بخش بعدی، مهم‌ترین اتحادهای جبری معرفی می‌شوند.

مهم‌ترین اتحادهای جبری

اتحادها، در واقع، روابط و تساوی‌هایی هستند که به کمک آن‌ها می‌توان تجزیه عبارت‌ها را سریع‌تر و آسان‌تر انجام داد. برای مثال، دانستن اتحاد $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ به ساده کردن و تجزیه عبارت‌های جبری کمک زیادی خواهد کرد.

فیلم آموزش ریاضی - پایه نهم در فرادرس



کلیک کنید

در ادامه، با اتحادهای مهم آشنا می‌شویم که بهتر است آن‌ها را به خاطر بسپارید. در «تقلب نامه (Cheat Sheet) فرمول‌های جبری» می‌توانید به فایل PDF اتحادها دسترسی داشته باشید.

اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای (اتحاد اول)

اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای که به آن اتحاد اول نیز می‌گویند، در مواردی به کار می‌رود شکل عبارت بگونه‌ای باشد که بتوان آن را به صورت مجذور مجموع دو جمله نوشت.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

دقت کنید که a و b جمله هستند، یعنی می‌توانند عدد یا عبارت باشند. برای مثال، تساوی زیر را ببینید که در آن، $a = xy$ و $b = 2z$:

$$(xy + 2z)^2 = x^2y^2 + 4xyz + 4z^2$$

اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای (اتحاد دوم)

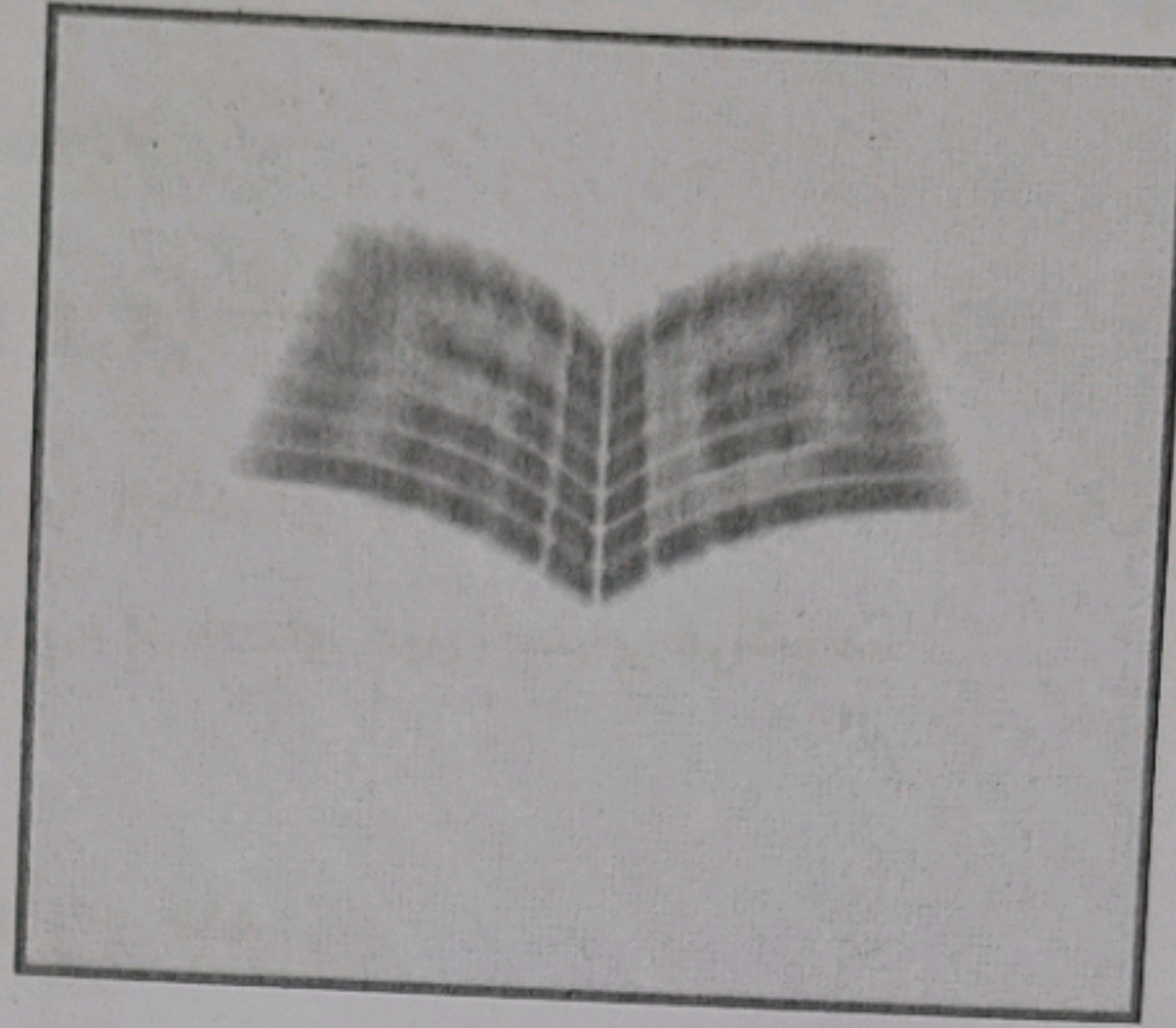
اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای که به اتحاد دوم معروف است، مشابه اتحاد اول است و همان ویژگی‌ها را دارد، با این تفاوت که بین a و b علامت منفی قرار دارد. این اتحاد به صورت زیر است:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

April 16, 2025 16:38

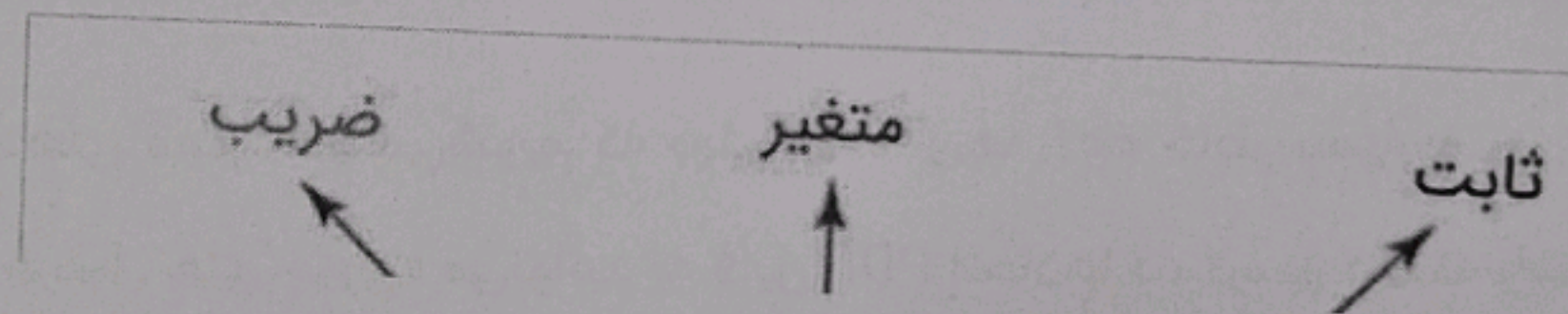
کلیا

فیلم آموزش ریاضی - پایه دهم | رشته‌های تجربی و ریاضی

①
آیا ده

عبارت جبری چیست؟

یک عبارت جبری (Algebraic Expression) ترکیبی از جملات با ثابت‌ها و متغیرها است که با عملیات جبری مانند جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و غیره به هم پیوند داده شده‌اند. برای مثال، $5x + 7$ یک عبارت جبری است. هر عبارت جبری اجزای مختلفی دارد که در تصویر زیر آن‌ها را نشان داده‌ایم.



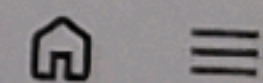
فیلم آموزش ریاضی - پایه نهم

کلی

تبلیغات همکاری با ما تماس با ما

فرادرس

جستجوی مطالب ...



تجزیه عبارت جبری چیست؟

وقتی می‌گوییم یک عبارت جبری را تجزیه کنیم، منظور این است که آن عبارت را که به صورت مجموع چند جمله بیان شده، به شکل حاصل ضرب چند جمله‌ای‌ها بنویسیم. برای مثال، عبارت جبری ساده $2x^2 + 2x$ را در نظر بگیرید. با فاکتور گرفتن از $2x$ ، این عبارت ساده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2x^2 + 2x = 2x(x + 1)$$

فهرست

فیلم آموزش ریاضی - پایه هشتم در فرادرس



کلی

فیلم آموزش ریاضی - پایه نهم

۴.۲ فاکتورگیری (تجزیه)

یکی از روش‌های بسیار پرکاربرد در تجزیه چند جمله‌ای‌ها، فاکتورگیری است. در این روش، ابتدا بین جملات ب.م.م گرفته و آن را عامل فاکتور می‌نامیم؛ در صورتی که این عامل ۱ نباشد، تک تک جملات را بر این عامل تقسیم می‌کنیم. با ضرب قرار دادن عامل فاکتور برای حاصل این تقسیم، فاکتورگیری کامل می‌شود.

به عنوان مثال، برای تجزیه عبارت $3x^5 - 2x^2 + 7x$ ابتدا ب.م.م $3x^5$ ، $-2x^2$ و $7x$ را به دست می‌آوریم که برابر x است؛ سپس تک تک جملات را بر این عامل تقسیم می‌کنیم که در نتیجه عبارت $3x^4 - 2x + 7$ حاصل خواهد شد. لذا تجزیه عبارت داده شده با استفاده از فاکتورگیری به شکل $3x^5 - 2x^2 + 7x = x(3x^4 - 2x + 7)$ است.

در تجزیه چند جمله‌ای‌ها، ابتدا در صورت امکان فاکتور گرفته، سپس چنانچه عبارت به دست آمده درون پرانتز با استفاده از اتحادهای جبری قابل تجزیه باشد، آن را نیز تجزیه می‌کنیم.

مثال ۶.

$$2x^3 - 3x^2 + 2x = 2x^2(x^2 - 2x + 1) = 2x^2(x - 1)^2$$

$$2x^5 - 22x = 2x(x^4 - 11) = 2x(x^2 - 4)(x^2 + 4)$$

$$x^3 - x^2 - 3x = x(x^2 - x - 3) = x(x - 2)(x + 2)$$

$$28x^2 - 12x = 4x(7x^2 - 3) = 4x(2x - 3)(2x + 3)$$

$$4x^4 - 22x = 4x(x^3 - 8) = 4x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^5 + 10x^3 + 25x = x^2(x^3 + 10x + 25) = x^2(x + 5)^2$$

$$2x^3 + 3x^2 = 2x^2(x^2 + 1) = 2x^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

مثال ۷. کسرهای زیر را تجزیه کرده، سپس تا حد امکان ساده کنید.

$$(i) \frac{x^2 - 7x + 5}{x^2 - 1}$$

$$(ii) \frac{x^3 - 9}{x^3 + 7x^2 + 9}$$

$$(iii) \frac{x^2 + 2x - 18}{x^2 - 5x + 4}$$

$$(iv) \frac{x^5 + x^3 - 2x^2}{x^2 - x}$$

$$(v) \frac{x^2 - 7x}{x - 8}$$

$$(vi) \frac{2x^3 - 8x^2 + 8x}{x^3 - 2x^2}$$

فاکتورگیری به شکل $(1x^2 - 1x + 2) = x(x^2 - 1x + 2)$ است.

در صورت امکان فاکتور گرفته، سپس چنانچه عبارت به دست آمده درون تجزیه باشد، آن را نیز تجزیه می کنیم.

$$2x^3 - 3x^2 + 2x = 2x^2(x - 2x + 1) = 2x^2(x - 1)^2$$

$$2x^5 - 22x = 2x(x^4 - 11) = 2x(x^2 - 4)(x^2 + 4)$$

$$x^3 - x^2 - 3x = x(x^2 - x - 3) = x(x - 2)(x + 2)$$

$$28x^3 - 32x = 4x(7x^2 - 8) = 4x(2x - 2)(2x + 2)$$

$$4x^3 - 22x = 4x(x^2 - 8) = 4x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^5 + 10x^3 + 25x = x^3(x^2 + 10x + 25) = x^3(x + 5)^2$$

$$2x^3 + 2x^2 = 2x^2(x + 1) = 2x^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

ه، سپس تا حد امکان ساده کنید.

April 16, 2025 16:39

$$(i) \frac{x^3 - 3x + 5}{x^2 - 1}$$

$$(ii) \frac{x^3 - 9}{x^2 + 3x^2 + 9}$$

$$(iii) \frac{x^3 + 3x - 28}{x^2 - 5x + 4}$$

$$(iv) \frac{x^5 + x^3 - 2x^2}{x^2 - x}$$

(v)

تعریف ۷. تابع رابطه‌ای است که در آن هیچ دو زوج متمایزی دارای مختص‌های اول برابر نباشند؛ به عبارت دیگر، اگر دو زوج دارای مختص‌های اول مساوی بودند، آنگاه مختص‌های دوم نیز برابر باشد. در تابع، مجموعه مختص‌های اول را دامنه (D_f) و مجموعه مختص‌های دوم را برد (R_f) می‌نامیم.

مثال ۸. رابطه $\{(2, 4), (6, 8)\} \subseteq M \times K$ یک تابع است که $\{2, 6\}$ دامنه و $\{4, 8\}$ برد آن است. ولی رابطه $\{(2, 4), (6, 8), (2, 2)\} \subseteq M \times K$ تابع نیست، زیرا زوج‌های $(6, 8)$ و $(6, 4)$ دارای مختص‌های اول برابر و مختص‌های دوم نابرابر هستند.

نکته. زیرمجموعه $\{(2, 4), (6, 8)\}$ از $M \times K$ در مثال ۸ یک تابع است که در آن مختص‌های دوم از مختص‌های اول دو واحد بیشتر است. این تابع را می‌توانیم به صورت $\{(x, y) \mid y = x + 2\}$ و یا $\{(x, x + 2) \mid x \in \{2, 6\}\}$ نیز نمایش دهیم.

تعریف ۹. ضابطه تابع f قاعده‌ای است که به هر عضو از مجموعه دامنه، عضو منحصر به فردی به نام $f(x)$ از مجموعه برد را نسبت می‌دهد. ضابطه را به صورت $y = f(x)$ و یا به صورت $f: A \rightarrow B$ نمایش می‌دهیم که در آن $x \mapsto f(x)$ نمایش دوم، مجموعه A دامنه تابع f و مجموعه B برد آن یا مجموعه‌ای است که برد را شامل می‌شود.

مثال ۱۰. رابطه $y = 3x$ ضابطه یک تابع است. این تابع را می‌توان به صورت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ نمایش داد که در آن $x \mapsto 3x$ آن $\mathbb{R}$ دامنه و برد تابع f است. در تابع $g: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ مجموعه $\mathbb{R}^{\geq 0}$ هم دامنه و هم برد g است. همچنین این تابع را می‌توان به صورت $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ نیز نمایش داد که در این نمایش $R_g \subseteq \mathbb{R}$ و $x \mapsto \sqrt{x}$.

مثال ۱۱. اگر $f(x) = 2x - 7$ و $g(x) = x^2 + 1$ باشد، آنگاه $f(0)$ ، $f(-1)$ ، $g(-2)$ و $g(2)$ را به دست آورید.

۱.۶ توابع خاص

تعریف ۱. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که c عددی ثابت است، تابع ثابت نامیده می‌شود. هم‌چنین تابع $f(x) = x$ را $f(x) = c$

تابع همانی گوئیم که نمودار آن نیمساز ربع اول و سوم است. تابع $f(x) = -x$ نیز نیمساز ربع دوم و چهارم است.

تعریف ۲. تابع f یک‌به‌یک است هرگاه هیچ دو زوج متمایزی مؤلفه‌های دوم برابر نداشته باشد؛ یعنی برای هر عضو از برد تابع تنها یک عضو منحصر به فرد از دامنه موجود باشد.

تعریف ۳. تابع $f: A \rightarrow B$ پوشاست هرگاه برای هر $y_0 \in B$ ، عنصر $x_0 \in A$ موجود باشد به طوری که $f(x_0) = y_0$ ؛ یعنی هر خط $y = y_0 \in B$ نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع کند. تابع یک‌به‌یک و پوشا را تناظر یک‌به‌یک می‌گوئیم.

تعریف ۴. فرض کنیم $(x, -x \in D_f)$ باشند. در این صورت تابع f زوج است اگر $f(-x) = f(x)$ و تابع f فرد است اگر $f(-x) = -f(x)$.

تعریف ۵. عبارت $\Delta x = x_2 - x_1$ را نمو x و $\Delta y = y_2 - y_1$ را نمو y می‌گوئیم.

تعریف ۶. تابع f صعودی است اگر برای هر $(x_1, x_2 \in D_f)$ از $x_1 < x_2$ نتیجه بگیریم $f(x_1) \leq f(x_2)$. (به طور معادل f صعودی است اگر برای هر $(x_1, x_2 \in D_f)$ داشته باشیم $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$)

به همین ترتیب، تابع f نزولی است اگر برای هر $(x_1, x_2 \in D_f)$ از $x_1 < x_2$ نتیجه بگیریم $f(x_1) \geq f(x_2)$. (به طور معادل f نزولی است اگر برای هر $(x_1, x_2 \in D_f)$ داشته باشیم $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$). توابع صعودی و نزولی را توابع یکنوا نیز می‌گویند.

نکات:

(i) برای تشخیص تابع از روی نمودار، اگر هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نمودار یک تابع خواهد بود.

(ii) برای تشخیص تابع از روی ضابطه، اگر از $x_1 = x_2$ نتیجه شود $f(x_1) = f(x_2)$ ، ضابطه یک تابع است.

(iii) برای تشخیص تابع یک‌به‌یک از روی نمودار، اگر هر خط موازی محور x ها نمودار را فقط در یک نقطه قطع کند، نمودار تابع یک‌به‌یک است.

۴.۵ رسم نمودار توابع رادیکالی

برای رسم نمودار توابع رادیکالی به فرم $y = c\sqrt{ax+b} + d$ ابتدا دامنه تابع را تعیین کرده، سپس در جدول نقطه یابی با توجه به دامنه به دست آمده چند نقطه را به دست می آوریم. توجه کنید در قسمتی که تابع تعریف نشده؛ یعنی جزو دامنه تابع نیست نموداری رسم نمی شود.

اگر $a, c > 0$ باشد، نمودار به شکل
 و اگر $a > 0$ و $c < 0$ باشد، نمودار به شکل
 است. هم چنین
 و اگر $a < 0$ و $c > 0$ باشد، نمودار به شکل
 است.

مثال ۶. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = 2\sqrt{x-3}$$

$$f(x) = -\sqrt{x+1}$$

$$f(x) = -3\sqrt{-x-5} + 2$$

۵.۵ رسم نمودار تابع قدر مطلق به فرم $c|ax+b| + d$

تابع دو ضابطه ای $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$ تابع قدر مطلق نامیده می شود و با نماد $|x|$ نشان داده می شود. همان طور که از تعریف تابع قدر مطلق برمی آید، این تابع به ازای همه مقادیر مثبت است؛ به عبارت دیگر همواره $|x| \geq 0$.

برای رسم این تابع، ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را مساوی صفر قرار داده، x را به دست می آوریم؛ سپس مقادیر تابع را به ازای نقطه x ، $x-1$ و $x+1$ محاسبه می کنیم؛ با این سه نقطه می توان نمودار تابع قدر مطلق را رسم کرد.

اگر $c > 0$ باشد، نمودار به شکل
 و ریشه عبارت داخل قدر مطلق طول نقطه مینیمم است؛ ولی اگر $c < 0$
 باشد، نمودار به شکل
 و ریشه عبارت داخل قدر مطلق طول نقطه ماکزیمم تابع است.

مثال ۹. $|\frac{1}{\sqrt{2}}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $|5.8| = 5.8$ ، $|-0.46| = 0.46$ ، $|- \frac{7}{8}| = \frac{7}{8}$ ، $|0| = 0$ ، $|-6| = 6$ ، $|4| = 4$

مثال ۱۰. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = |x| \quad f(x) = |x+2| \quad f(x) = -3|x| + 1 \quad f(x) = 2|x-1| - 1$$

گاهی ضابطه توابع درجه دوم به فرم $y = c(ax + b)^2 + d$ است. در این حالت برای یافتن طول رأس سهمی کافی است عبارتی که به توان دو رسیده مساوی صفر قرار دهیم؛ سپس برای رسم نمودار سهمی مانند حالت قبل از جدول نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم.

مثال ۳. طول رأس سهمی‌های زیر را به دست آورید.

$$(i) f(x) = x^2, \quad (ii) f(x) = (x - 2)^2, \quad (iii) f(x) = -3(x - 1)^2, \quad (v) f(x) = -2(x + 1)^2 - 4$$

حل.

$$(i) x = 0, \quad (ii) x = 2, \quad (iii) x = 1, \quad (v) x = -1$$

مثال ۴. نمودار توابع مثال قبل را رسم کنید.

۳.۵ رسم نمودار توابع درجه سوم به فرم $y = c(ax + b)^3 + d$

برای رسم نمودار این توابع نیز ابتدا عبارتی که به توان سه رسیده مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ مقدار x به دست آمده طول نقطه عطف تابع درجه سوم نامیده می‌شود. سپس مقادیر تابع را برای نقطه عطف (x_1) و $x_1 + 1$ و $x_1 - 1$ در جدول نقطه‌یابی محاسبه و نمودار را رسم می‌کنیم.

* گاهی ضابطه توابع درجه دوم به فرم $y = c(ax + b)^2 + d$ است. در این حالت برای یافتن طول رأس سهمی کافی است عبارتی که به توان دو رسیده مساوی صفر قرار دهیم؛ سپس برای رسم نمودار سهمی مانند حالت قبل از جدول نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم.

مثال ۳. طول رأس سهمی‌های زیر را به دست آورید.

(i) $f(x) = x^2$, (ii) $f(x) = (x - 2)^2$, (iii) $f(x) = -3(x - 1)^2$, (v) $f(x) = -2(x + 1)^2 - 4$

حل. (i) $x = 0$, (ii) $x = 2$, (iii) $x = 1$, (v) $x = -1$

مثال ۴. نمودار توابع مثال قبل را رسم کنید.

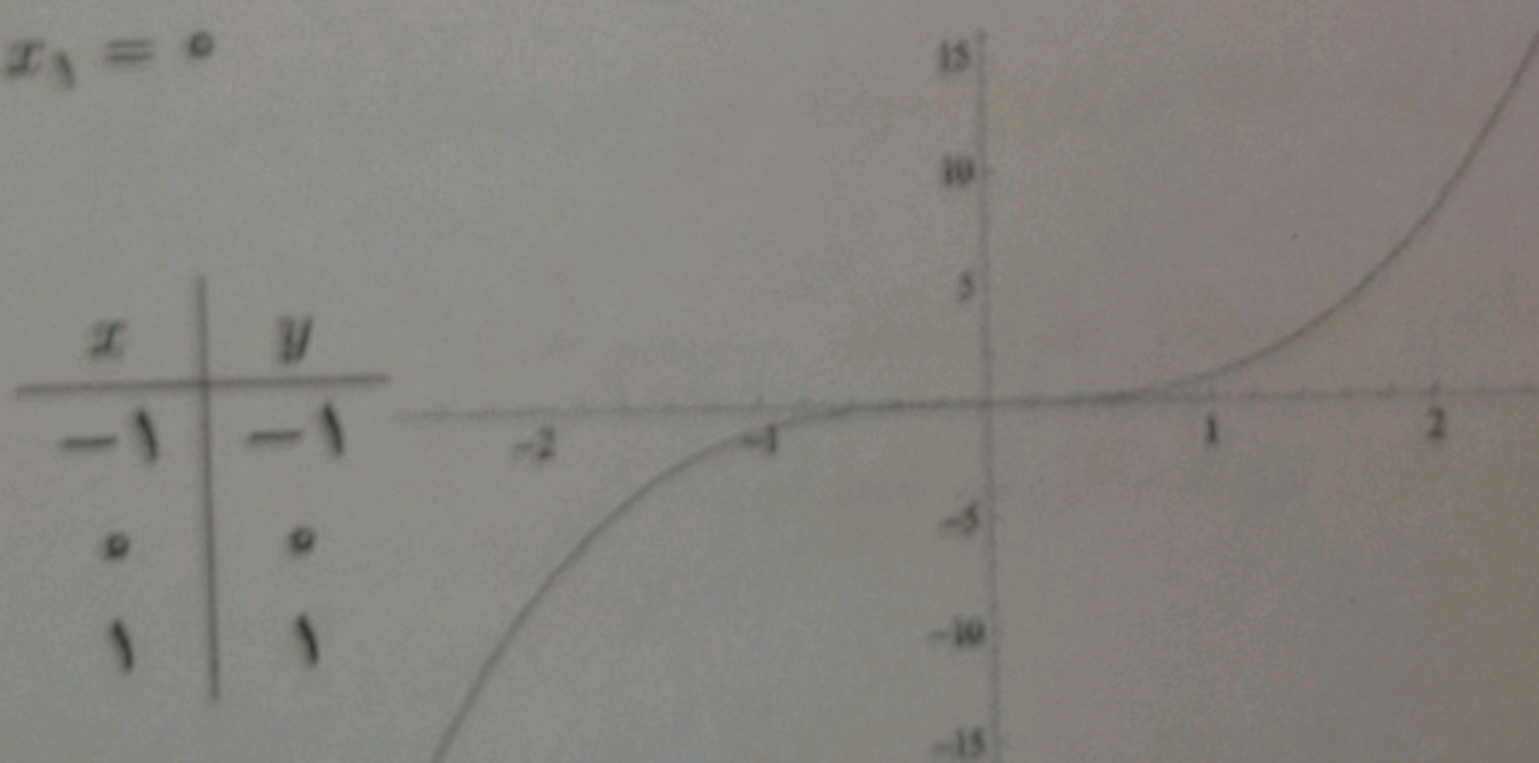
۳.۵ رسم نمودار توابع درجه سوم به فرم $y = c(ax + b)^3 + d$

برای رسم نمودار این توابع نیز ابتدا عبارتی که به توان سه رسیده مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ مقدار x به دست آمده طول نقطه عطف تابع درجه سوم نامیده می‌شود. سپس مقادیر تابع را برای نقطه عطف (x_1) ، $x_1 + 1$ و $x_1 - 1$ در جدول نقطه‌یابی محاسبه و نمودار را رسم می‌کنیم. نمودار این توابع به شکل و یا به شکل است.

مثال ۵. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

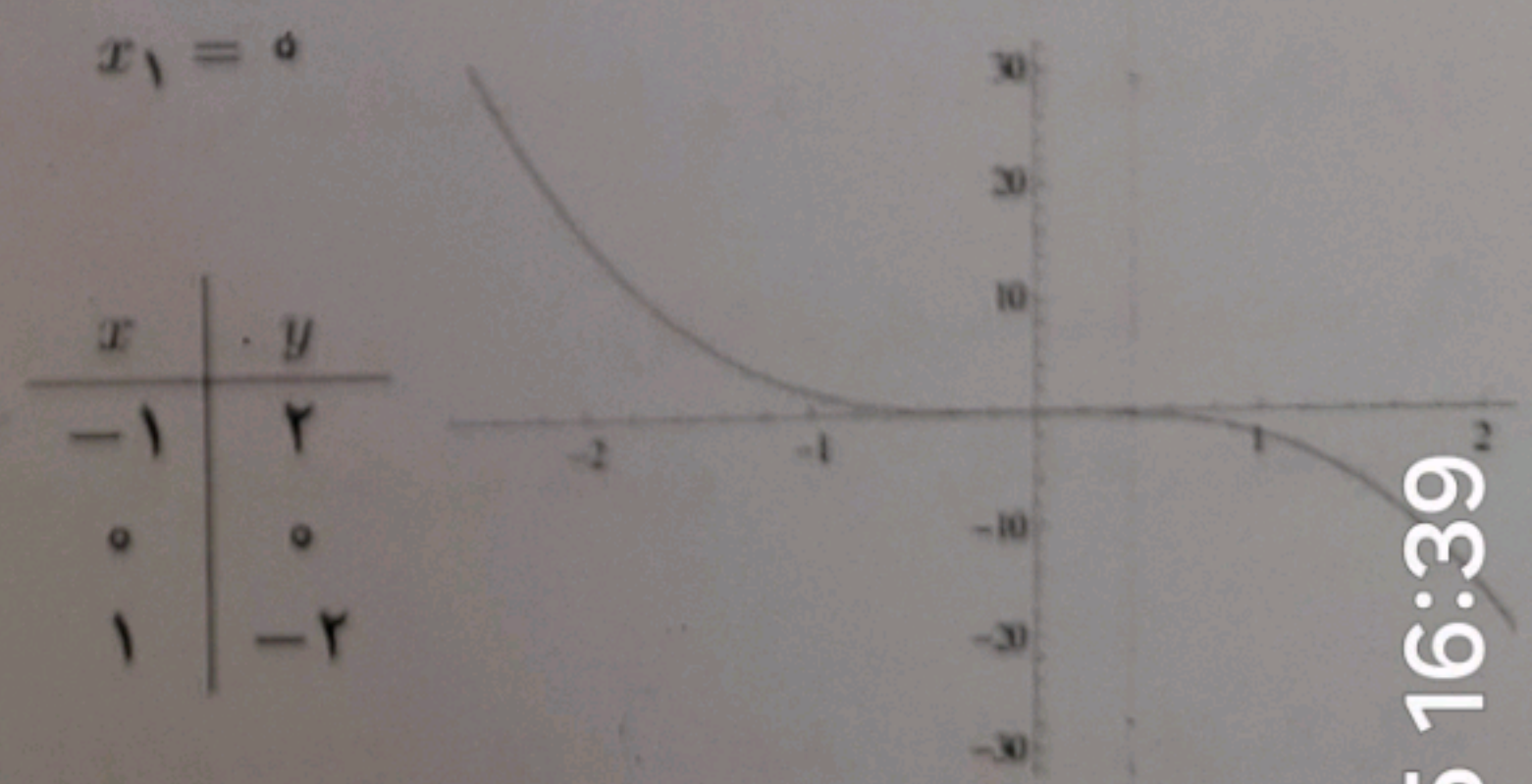
$$f(x) = x^3$$

$$x_1 = 0$$



$$f(x) = -2x^3$$

$$x_1 = 0$$



$$f(x) = -(x - 2)^3$$

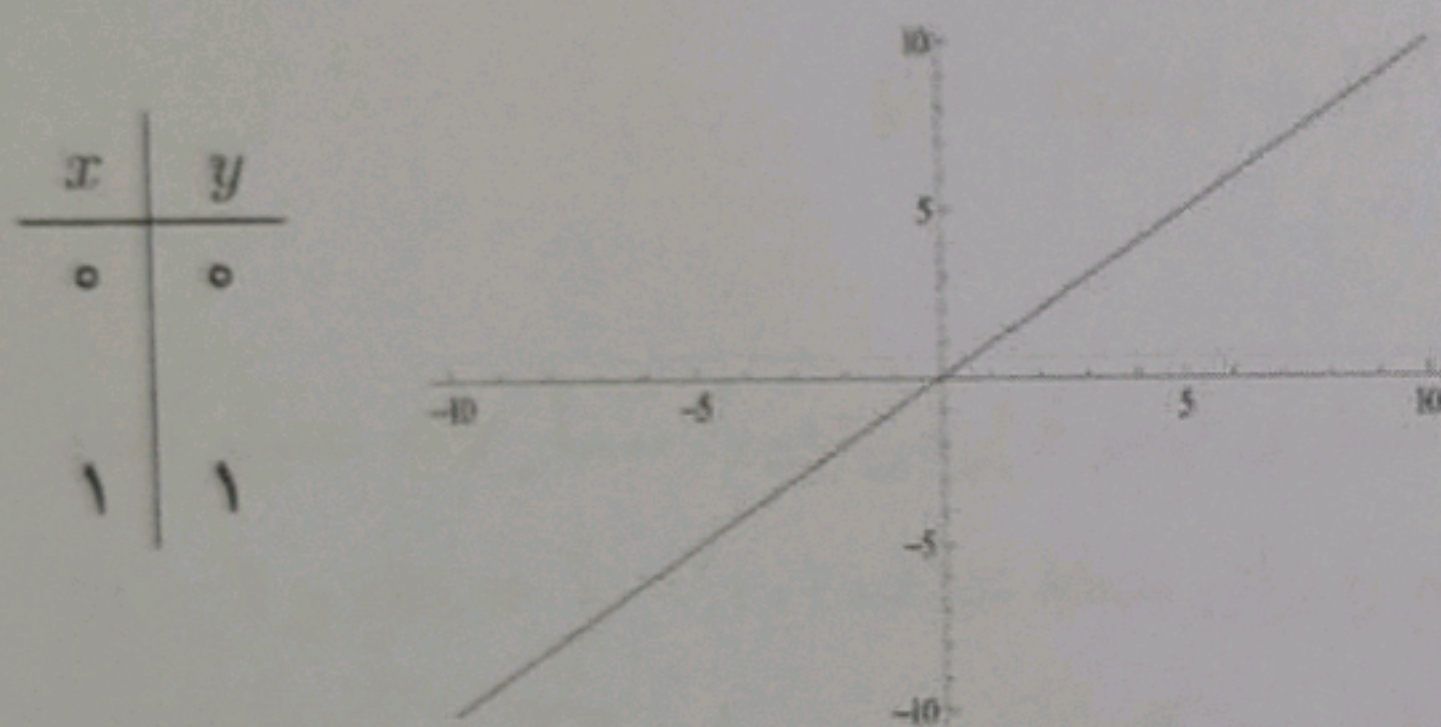
$$f(x) = 5(x + 4)^3 + 2$$

۱.۵ رسم نمودار توابع درجه اول $y = ax + b$

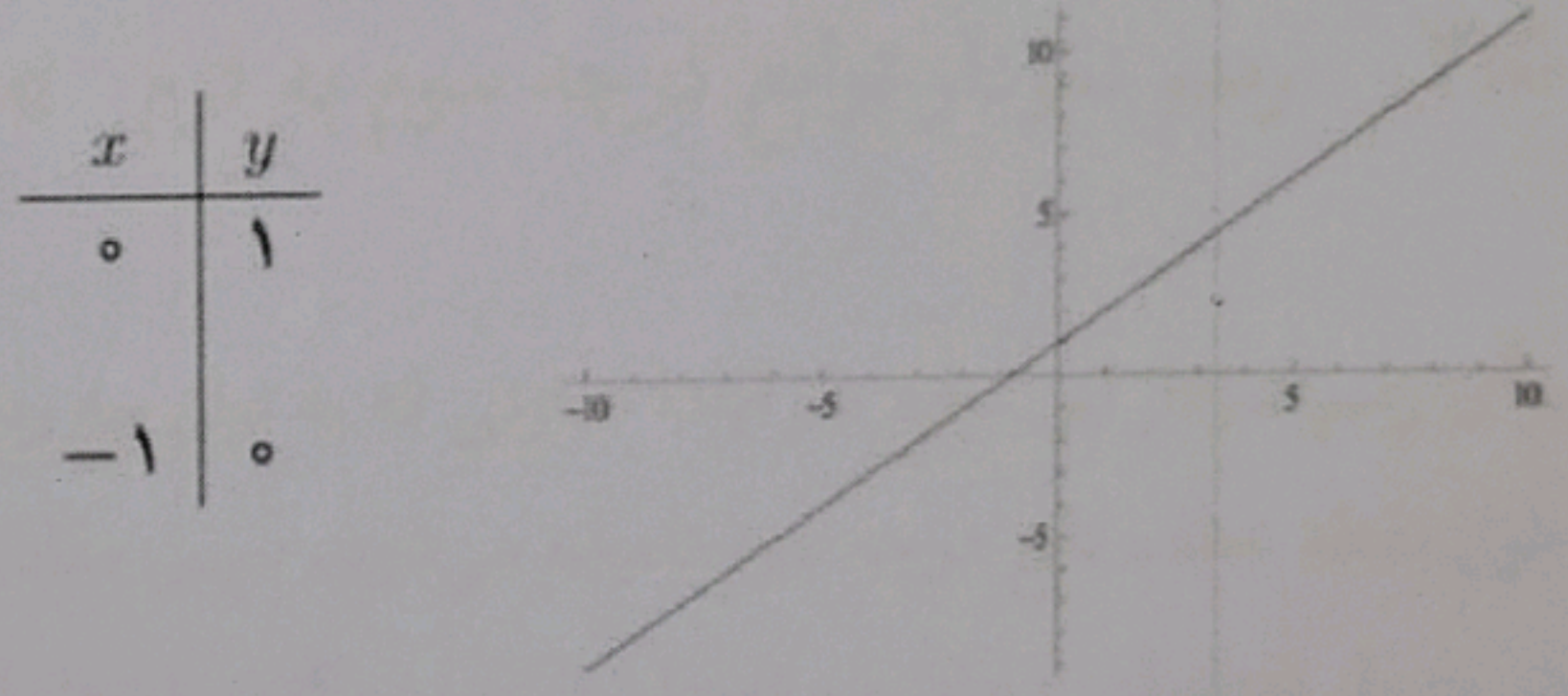
نمودار این توابع به شکل خط راست است؛ لذا برای رسم آن تنها یافتن دو نقطه از نمودار کافی است. در تابع درجه اول، a شیب خط، b عرض از مبدأ و $-\frac{b}{a}$ طول از مبدأ خط نامیده می‌شود. اگر $a > 0$ باشد، تابع صعودی و نمودار خط راست به صورت واگر $a < 0$ باشد، تابع نزولی و نمودار خط به صورت خواهد بود.

مثال ۱. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x$$



$$f(x) = x + 1$$



۲.۵ رسم نمودار توابع درجه دوم (سه‌می)

نمودار توابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ به شکل سه‌می است. برای رسم آن‌ها ابتدا $x_0 = -\frac{b}{2a}$ را به دست می‌آوریم که رأس سه‌می نامیده می‌شود؛ با این نقطه و دو نقطه دیگر می‌توان نمودار سه‌می را رسم نمود. لذا کافی است در جدول نقطه‌یابی $x_0 - 1$ و $x_0 + 1$ را قرار داده و مقادیر تابع را در این نقاط محاسبه و نمودار را رسم کنیم.

توجه داشته باشید که می‌توانید نقاط بیشتری از تابع را برای رسم محاسبه کنید؛ ولی در حالت کلی سه نقطه مورد نظر نمودار را مشخص می‌کند. در این توابع اگر $a > 0$ باشد، رأس سه‌می نقطه مینیمم بوده، گودی نمودار رو به بالا و به شکل $\cup$ است. هم‌چنین اگر $a < 0$ باشد، رأس سه‌می نقطه ماکزیمم بوده، گودی نمودار رو به پایین و به شکل $\cap$ است.

مثال ۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$f(x) = -2x^2 - x$$

۳.۴ تعیین دامنه توابع

در این بخش چگونگی یافتن دامنه توابع چندجمله‌ای، گویا و رادیکالی را که کاربرد بیشتری دارند، بیان می‌کنیم.

(I) در تابع چندجمله‌ای درجه n به صورت $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_n \neq 0$ است، دامنه همواره $\mathbb{R}$ می‌باشد.

(II) دامنه توابع گویا $\frac{p(x)}{q(x)}$ که $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x هستند، به صورت $\mathbb{R} - \{x \mid q(x) = 0\}$ یا به عبارت دیگر $\mathbb{R} - \{\text{ریشه مخرج}\}$ است.

(III) دامنه توابع رادیکالی مجموعه‌ای است که به ازای آن عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

مثال ۱۲. دامنه توابع زیر را به دست آورید.

$f_1(x) = -x - 1$	$\Rightarrow$	$D_{f_1} = \mathbb{R}$
$f_2(x) = \frac{1}{x}$	$\Rightarrow$	$D_{f_2} = \mathbb{R} - \{0\}$
$f_3(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$	$\Rightarrow$	$D_{f_3} = \mathbb{R} - \{5\}$
$f_4(x) = \sqrt{x-2}$	$\Rightarrow$	$D_{f_4} = \{x \mid x \geq 2\} = [2, +\infty)$
$f_5(x) = x^5 - 2x^2 + x - 1$	$\Rightarrow$	$D_{f_5} = \mathbb{R}$
$f_6(x) = \frac{x^2-9}{x+2}$	$\Rightarrow$	$D_{f_6} = \mathbb{R} - \{-2\}$
$f_7(x) = \sqrt{4x-1}$	$\Rightarrow$	$D_{f_7} = \{x \mid x \geq \frac{1}{4}\} = [\frac{1}{4}, \infty)$