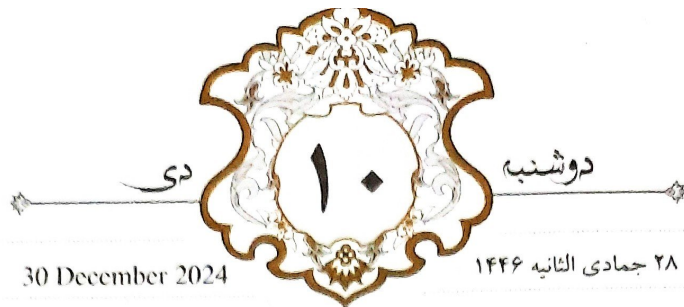




استاد ریاضی

30 December 2024

۲۸ جمادی الثانیه ۱۴۴۶

ریاضی عمومی ۲

۱۴۰۳

کتاب های مرجع: ریاضی عمومی ۲ دکتر فداوندی - حساب دیفرانسیل و انتگرال

حساب دیفرانسیل آپوستل - نمونه ها: لامعه فعالیت کتاب و مسائل آزمون - ۱۵ آزمون

توابع چند متغیره: در درس ریاضی عمومی ۱ با توابع اسکالر آشنا شدیم که خاصه تعریف بردارهای حقیقی

از اعداد R بودند مانند:

$$f: R \rightarrow R$$

$$f(x) = x^2 - 2x + \sin x$$

در درس ریاضی عمومی ۲ در مبحث توابع چند متغیره با توابع برداری از توابع بردار به بردار خواهیم شد

بنابراین تعریف توابع چند متغیره به صورت زیر می باشد هر دو:

$$f: R^n \rightarrow R$$

به صورتی که برای هر n تایی $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک فقط یک متغیره با مقدار

در نظر گرفته شود که آن را z می نامیم به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$\text{if } n \geq 2 \text{ then } f: R^n \rightarrow R$$

تابعی دو متغیره بودن را با اضافه کردن زیر نشان می دهیم مانند:

$$z = f(x, y)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy + 1$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y - 1}$$

$$z = \frac{x^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$$

نقشه ۳: اگر $n = 3$ باشد واضح است که هیچ ما ۳ متغیره نخواهد بود پس با فرضیه

$$f(x, y, z) = w \quad \text{نشان می دهند.}$$

نقشه ۲: ضاهیم دامنه تعریف و برد برای توابع دو متغیره زیر مجموعه ای از R^2 و

توابع ۳ متغیره زیر مجموعه ای از R^3 خواهد بود.

مثال ۱ دامنه تعریف توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x, y) = x^2 - 4y^2 + 7$$

نقشه: دامنه تعریف توابع چند جمله ای خطی متغیره $D_f = R^2$ است.

$$D_f \rightarrow R^2$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y - 19}$$

نقشه: برای به دست آوردن دامنه تعریف توابع رادیکالی با فرضیه زوج عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر

صفر قرار داده در صورت امکان نامعادله را حل می نمایم.

$$x^2 - 4y - 19 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4y \geq 19 \rightarrow D_f = \{(x, y) \mid x^2 - 4y - 19 \geq 0\}$$

$$\text{ج) } f(x, y) = \frac{x^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$$

نقشه: برای به دست آوردن دامنه تعریف دو متغیره ربه متغیره کسری ابتدا راسم های خروج را

به دست آورد پس آن را از R^2 و R^2 کسری می نمایم.

$$x^2 + y^2 = 0 \rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$D_f = R^2 - \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$$

نکته: برای به دست آوردن دامنه تعریف توابع رادیکالی مانند جذر از تابع دقت کنید باشد D_f و R^2 و اگر سه متغیره باشد D_f و R^3 می باشد.

حد و پیوستگی: اگر $f(x, y, z)$ تابعی دمتغیره باشد در این صورت داریم

ایمپلن $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.t. , $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \iff |f(x, y) - L| < \epsilon$
 $(x, y) \rightarrow (a, b)$

$$\Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$$

برای استفاده بهتر در حل سرفقه اثبات حد دانستن نامگذاری های زیر مفید خواهد بود.

$$|u| \leq \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$|v| \leq \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$|\sin x| \leq 1$$

$$|e^x| \leq 1$$

$$|u \pm v| \leq |u| + |v|$$

$$|\sin u| \leq |u|$$

تعریف ۱: لایمیت قوانین و قضایای حد برای توابع یک متغیره درست می باشد به جز در موارد استثنایی که حد به سمت مبدأ محققات میل می نماید.

وجود یا عدم وجود حد تابع در مبدأ محققات

برای بررسی وجود حد در مبدأ محققات ابتدا مسیرهای چندگانه زیر را محاسبه نمود و اگر در تمام مسیرها حد تابع برابر باشد $\Rightarrow$ احتمال قریب به یقین حد تابع همین مقدار می باشد.

آغاز سال ۲۰۲۵ میلادی



پنجشنبه

دی

ولی اگر در هر یک از مسیرها مقدار حد متفاوت باشد بنا به تعریف اعداد منتهی که تابع حد ندارد.

حد ندارد.

مسیرهای مختلفانه

۱) $x = 0$

۲) $y = 0$

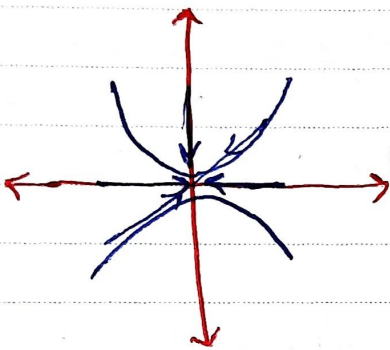
۳) $y = x$

۴) $y = -x$

۵) $y = mx$

۶) $y = x^2$

۷) $y = mx^2$



همه امتحان

مثال ۲) تابع $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ را در صورت وجود در مبدأ محقق به دست

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

آید.

$x = 0 \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$

$y = 0 \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

بنابراین با توجه به آنکه در دو مسیر مقادیر مختلفی برای حد به وجود آمده است با قطعیت

اعداد منتهی که تابع در مبدأ محقق حد ندارد.



$\lim_{y \rightarrow b, x \rightarrow a} f(x, y) = l$

و اما در مورد نامیده و مقدار حد آن ها نیز برابر با آن می باشد در صورتی که حدود مکرر وجود داشته

باید نظر توان نتیجه گرفت که تابع حد دارد. به عبارت ساده تر عکس قضیه همواره درست نمی باشد.

مثال ۳) حد تابع $\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ و $f(x, y)$ را در مبدأ مختصات در صورت وجود بدست آورید

دیں حدود مقرر ہیں، احکامات یہ بتائیے۔

$$b) x=0 \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln 0 \cdot y^2}{0 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln 0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln 0}{y} = 0$$

$$r) y=0 \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^r y}{x^r + y^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r x_0}{x^r + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$P, y=x \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^r y}{x^r + y^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r x}{x^r + x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r}{2x^r} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \frac{0}{0} = 0$$

$$f, y = -x \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^r y}{x^r + y^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r x - x}{x^r + x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^r}{2x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2}$$

$$\frac{0}{1} = 0$$

$$b) y = mx \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r \cdot mx}{x^r + m^r x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^r}{x^r(1+m^r)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{1+m^r} = 0$$

$$4) y = x^2 \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$5) y = mx^2 \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + m^2 x^4}{x^2 + m^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + m^2 x^2}{1 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + m^2 x^2}{1 + m^2 x^2} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1$$

باتوجه به آنکه در مراحل مختلف هفتگانه مقدار حد برابر با هم می باشد بنابراین حد تابع برابر با هم می باشد بوده که می توان از طریق اثبات حد آن را اثبات نمود.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + y^2}{0 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

تعریف حد دو متغیره: تابع $z = f(x, y)$ در مبدأ مختصات و یا هر نقطه ای باشد

در (x_0, y_0) به سبب من همگانه $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ باشد.

حل تمرین

تمرین ①: مقدار حد تابع زیر را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

تمرین ②: سید سید باغ زیر را مشخص کنید.

$$(x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{cases}$$

$$(x, y) = (0, 0)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (x, y) \neq (0, 0) \\ (x, y) = (0, 0) \end{matrix}$$



مشتق جزئی: هرگاه از یک تابع حیدر مشتق نسبت به یک متغیر مشتق بگیریم دانستیم که آن را

مشتق جزئی نسبت به آن متغیر می نامند. بنابراین اگر $Z = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد مشتق

جزئی آن نسبت به متغیر x در نقطه (x_0, y_0) با عبارتهای $\frac{\partial f}{\partial x} = Z_x = D_x f = D_1 f = f_x$

فشان داده و به صورت زیر تعریف می نمایند:

و به همین ترتیب مشتق جزئی تابع دو متغیره نسبت به y را با عبارتهای $\frac{\partial f}{\partial y} = D_y f = Z_y = f_y = D_2 f$

و به صورت زیر تعریف می نمایند:

مطلب مهم: سوال امتحانی دارد.

مثال ۱: مشتقات جزئی تابع $Z = 3x^3 - 4y^4 + 7x^2y - 19$ را به دست آورید.

نکته: زمانیکه نسبت به x مشتق میگیریم y را مثل یک عدد در نظر میگیریم زیرا بود مشتق آن صفر باشد.

جواب به چهار ضاعید.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + 14xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -16y^3 + 7x^2$$

$$(x^2 + y^2 - xy)$$

مثال ۲: مشتقات مرتبه اول تابع $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \sin(x^2 + y^2) - y$ را به دست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - 2x \sin(x^2 + y^2) - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2y \sin(x^2 + y^2) - 1$$

$$1, y = \ln u \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$2, y = e^u \rightarrow y' = u' e^u$$

$$3, y = \cos u \rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$4, y = \sin u \rightarrow y' = u' \cos u$$

$$5, y = \operatorname{Arctg} u \rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$6, y = \operatorname{Arc cotg} u \rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$7, y = \operatorname{Arcsin} u \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$8, y = \operatorname{Arccos} u \rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

مثال (۵): سوال امتحانی

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

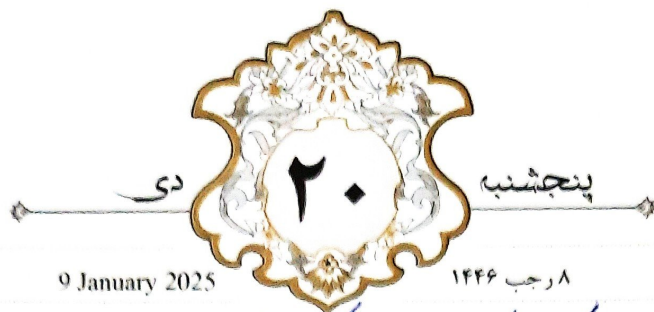
تابع

است حساب با استفاده از تعریف مشتق.

۱) $f_x(0, 0)$

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hx \cdot \frac{h^2 - 0}{h^2 + 0}}{h} = 0$$

$$f_y(1, 2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 2+h) - f(1, 2)}{h} =$$



مشتقات مراتب بالا را به گونه‌ای که در توابع بالا مشتق می‌توانیم در صورت مشتق پذیری از

کمی تابع n بار مشتق بگیریم درجه توابع چند مشتق نپذیرد تابع می‌توان چندین مرتبه

درجه n بار مشتق گرفت بنابراین اگر $z = f(x, y)$ کمی تابع در مشتق باشد در این صورت

مشتقات جزئی مرتبه اول آن را مشتقات جزئی مرتبه دوم آن m عدد خواهد شد.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

مثال ۴: تابع $f(x, y) = e^{x^2 y} - 3 \arctan(3x^3 - 19xy)$ مفروض است مطلوب

است محاسبه مشتقات جزئی مرتبه دوم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy e^{x^2 y} - 3 \left(\frac{9x^2 - 19y}{1 + (3x^3 - 19xy)^2} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{x^2 y} - 3 \left(\frac{-19x}{1 + (3x^3 - 19xy)^2} \right)$$



12 January 2025

۱۱ رجب ۱۴۴۶

مثال ۹: هرگاه $y = m^2 - \cos(mr)$ $x = m - r \sin(r)$ و $z = x^2 - 4y^2$

باید مطلوب است محاسبه $\frac{\partial z}{\partial m}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial m} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial m}$$

$$2x^2 (2m^2) + (-8y)(4m + r \sin(mr))$$

مثال ۱۰: هرگاه $f(x, y, z) = 0$ باشد و z تابعی از x, y در نظر گرفته شود در این صورت داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

مثال ۱۱: هرگاه $z - \ln(x^2 + z^2) = \sin(y^2 + x^2)$ باید مطلوب است محاسبه:

۱) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ برای حل باید همه تابع ها را صفر بگذاریم:

$$z - \ln(x^2 + z^2) - \sin(y^2 + x^2) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = - \frac{0 - \frac{1}{x+z^2} - 2x \cos(x^2 + y^2)}{1 - \frac{2z}{x+z^2} - 0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = - \frac{0 - 0 - 2y \cos(x^2 + y^2)}{1 - \frac{2z}{x+z^2} - 0}$$



دوشنبه

دی

13 January 2025

۱۲ رجب ۱۴۴۶

۱۴۰۳

کتابت

بردار دل: به بردار $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ بردار دل یا ناپیک گفته می شود.

بردار دیورانس: اگر $f(x, y, z) = i F_1(x, y, z) + j F_2(x, y, z) + k F_3(x, y, z)$ یک تابع برداری باشد

در این صورت حاصل ضرب داخلی یا نقطه ای بردار ناپیک (دل) و تابع برداری را دیورانس

نامیده می شود. آن را با علامت $\text{div } f$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می نمایند

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

گرنیل: با توجه به تابع برداری گفته شده در بالا و همچنین بردار دل گرنیل تابع برداری را با علامت

$\text{curl } F$ نشان داده و به صورت حاصل ضرب بردار بردار دل و تابع برداری F در نظر گرفته

$$\text{curl } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

و به صورت زیر تعریف می نمایند

گرادیان: اگر $f(x, y, z)$ یک تابع عددی باشد در این صورت گرادیان f را به صورت

$$\nabla f = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z}$$

زیر تعریف می نمایم:

در بعضی از کتب آن را با علامت $\text{grad } f$ نشان می دهند.

مشتق سویی در جهتی : مشتق تابع $z = f(x, y)$ در نقطه $p(x_0, y_0, z_0)$ در جهت

برداری $\vec{v} = (a, b, c)$ را معاد $D_{\vec{v}} f(p)$ نشان داده به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D_{\vec{v}} f(p) = \nabla f \cdot \vec{v}$$

$\downarrow$
 گرادیان

مثال ۵ هم‌اصفافی : مشتق جهت‌یابی تابع $f(x, y, z) = x^2 + \ln(y^2 + z^2)$ را در جهت کرل

میدان برداری $f(x, y, z) = x^2 y - y^2 z + (z + x^2)k$ در نقطه $p(1, 1, 0)$ به دست آوریم.

نکته برای حل درینال : اگر z را خواستیم به سبب نیمه‌دار بودن آن

ندارد را حذف کنیم باقی مانده‌ها را مقید می‌کنیم در یک سیر مغزی و

و می‌توانیم (یعنی از تابع $z + x^2$ نسبت به y و از تابع $x^2 y - y^2 z$ نسبت به z مشتق می‌گیریم) و نتیجه هم به همین صورت.

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & -y^2 z & (z + x^2) \end{vmatrix}$$

$\downarrow$
 یکی درینال مثبت و یکی در مقابل آن می‌گیریم و مسا می‌دهیم

$$\vec{u} = \frac{\text{curl } \vec{F}}{|\text{curl } \vec{F}|} = \frac{(0, 0, -3)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{(0, 0, -3)}{3} = (0, 0, -1)$$

$$\nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} 2x \vec{i} + \frac{2y}{y^2 + z^2} \vec{j} + \frac{2z}{y^2 + z^2} \vec{k}$$

$$\nabla f(1, 1, 0) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \rightarrow (2, 2, 0)$$

$$D_{\vec{u}} f(p) = \nabla f \cdot \vec{u} = (2, 2, 0) \cdot (0, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

ولادت حضرت امام علی (ع) (۲۳ سال قبل از هجرت) (تعطیل) - روز پدر - آغاز ایام ایض (اعتکاف) - روز تاریخ نگاری انقلاب اسلامی



حل کنید

مقدور است مطلوب است محاسبه:

$$f(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

تعیین تابع

الف) بررسی کنید تابع f در مبدأ مختصات $(0, 0)$

ب) محاسبه مشتقات جزئی تابع f در مبدأ مختصات

تعیین ۲: هرگاه $z = f(u, v)$ باشد نشان دهید: $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctan(y/x)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

تعیین ۳: اگر $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x})$ در آن z تابعی از x, y میباشد نشان دهید:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$$