

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



جزوه ریاضی عمومی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساوه

مهر 1404

استاد:

دکتر محمد سخا

گردآورنده:

آرین نظری

$$A = \{a \text{ و } b\} = \text{مجموعه } A$$

$$a \in A$$

$$c \notin A$$

$$B = \{ \} = \text{مجموعه } B$$

$$\emptyset = \text{تهی}$$

$$B \subset A$$

$$N = \{1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ و } +\infty\} = \text{اعداد طبیعی}$$

$$Z = \{-\infty \text{ و } +\infty\} = \text{اعداد صحیح}$$

$$R = (-\infty \text{ و } +\infty) = \text{اعداد حقیقی}$$

گویا

$$Q = \frac{m}{n} \text{ و } n \in N, n \neq 0$$

$$Q' = R - Q = \pi \text{ و } e$$

گنگ (اصم)

پی = 3,14

نپر = 2,7

$$1) \forall a \text{ و } b \in R : (-a+b) = -a+(+b)$$

به ازای a و b عضو R ، $-a$ به علاوه b برابر است با $-a$ به علاوه $+b$.

$$2) \forall a \in R : a \times 1 = 1 \times a = a$$

به ازای هر a عضو R ، a ضربدر یک برابر است با یک ضربدر a برابر است با a .

$$1) 3x^2y \cdot 5xy^3 = 15x^3y^4$$

$$2) (b^4)^5 \cdot (b^3)^2 = b^{20} \cdot b^6 = b^{26}$$

$$3) \frac{-5a^3b^2}{-10ab} = \frac{a^2b}{2}$$

$$4) \frac{4ab^3c^2}{-4a^2bc} = \frac{b^2c}{-a}$$

$$5) 3xy^2 + 6xy - 5xy^2 + 2xy = -2xy^2 + 8xy$$

$$6) -2xy(x^2y + 2x - 3y^2) = -2x^3y^2 - 4x^2y + 6xy^3$$

$$7) (x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$8) \frac{a^7 - 2a^5 + a}{a} = \frac{a^6 - 2a^4 + 1}{1} = a^6 - 2a^4 + 1$$

$$9) 3xyz - 2xyz + xyz - 4xyz = -2xyz$$

$$10) (a^2)^7 \cdot a = a^{14} \cdot a = a^{15}$$

$$11) \frac{-7abc^2}{14a^3b^2} = \frac{c^2}{-2a^2b}$$

$$12) \frac{9a^2y^3}{-3xy^4z^3} = \frac{-3x}{yz^3}$$

$$13) 7x^3 + 2x - 4x - x^3 + 3x = 6x^3 + x$$

$$14) (3x - 7)(x^4 - 2x - 5) = 3x^5 - 6x^2 - 15x - 7x^4 + 14x + 35 = 3x^5 - 6x^2 - x - 7x^4 + 35$$

$$15) \frac{8a^5b^3 \cdot 4a^2b^4 + 2ab^5}{2ab^2} = \frac{32a^7b^7 + 2ab^5}{2ab^2} = \frac{2ab^5(16a^6b^2 + 1)}{2ab^2} = b^3(16a^6b^2 + 1) = 16a^6b^5 + b^3$$

$$16) (3x^2)^3 \cdot (5x^3) = 27x^6 \cdot 5x^3 = 135x^9$$

$$17) (7x^3 + 5x - 9) - (3x^3 - 4x - 5) = 7x^3 + 5x - 9 - 3x^3 + 4x + 5 = 4x^3 + 9x - 4$$

☆ جلسه دوم ☆

اتحادها: اتحادهای جبری روابطی هستند که همواره درست بوده و کاربرد آن ها محاسبات ریاضی را سرعت می بخشد.

$$(1) \text{ اتحاد مربع دو جمله ای } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(2) \text{ اتحاد مزدوج } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(3) \text{ اتحاد جمله مشترک } (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(4) \text{ اتحاد مربع سه جمله ای } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(5) \text{ اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله (چاق و لاغر)} (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(6) \text{ اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$1) (x - 5)^2 = x^2 + 25 - 10x$$

$$2) (2x^2 - y^2)^2 = 4x^4 + y^4 - 4x^2y^2$$

$$3) (x + 2y)(x - 2y) = x^2 - 4y^2$$

$$4) (a^2 + 4b^2)(a^2 - 4b^2) = a^4 - 16b^4$$

$$5) (x - 4)(x - 7) = x^2 - 11x + 28$$

$$6) (3a - 1)(3a + 4) = 9a^2 + 9a - 4$$

$$7) (x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$$

$$8) (2y - 3x)(4y^2 + 6xy + 9x^2) = 8y^3 - 27x^3$$

$$9) (3x + 2y)^3 = 27x^3 + 3(3x)^2(2y) + 3(2y)^2(3x) + 8y^3 = 27x^3 + 54x^2y + 36y^2x + 8y^3$$

$$10) (2x^2 + 5y^2)^3 = 8x^6 + 3(2x^2)^2(5y^2) + 3(5y^2)^2(2x^2) + 125y^6 = 8x^6 + 60x^4y^2 + 150y^4x^2 + 125y^6$$

تمرین:

$$1) (a^4 + 2)^2 = a^8 + 4a^4 + 4$$

$$2) (a^8 - 3)(a^8 + 3) = a^{16} - 9$$

$$3) (x + x^2)(x - x^2) = x^2 - x^4$$

$$4) (2x + 5)(2x + 1) = 4x^2 + 12x + 5$$

$$5) (y - 2)^3 = y^3 + 3(y^2)(-2) + 3(-2)^2(y) - 8 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$$

$$6) (y + x)(y^2 - yx + x^2) = y^3 + x^3$$

$$7) (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 + 27$$

$$8) (a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1) = a^6 - 1$$

ب.م.م: بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد به صورت حاصل ضرب عامل های اول مشترک با کمترین توان تعریف می شود.

$$1) 16a^2bc^3 \text{ و } 8abc^7 = 8abc^3$$

$$2) 15xyz \text{ و } 7x^6 = x$$

$$3) 3a^2b \text{ و } 4xy = 1$$

تجزیه: یکی از ابزار مهم ریاضی عمومی می باشد که بر خلاف اتحادها انجام می گیرد.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



$$1) x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$2) 16a^4 + 8a^2b^2 + b^4 = (4a^2 + b^2)^2$$

$$3) x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$4) 4x^4 - y^2 = (2x^2 + y)(2x^2 - y)$$

$$5) 9x^2 - 49 = (3x - 7)(3x + 7)$$

$$6) a^2 + 7a + 6 = (a + 6)(a + 1)$$

$$7) 4x^2 - 10x + 4 = 2(2x^2 - 5x + 2)$$

$$8) a^2 - 7a + 12 = (a - 3)(a - 4)$$

$$9) x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$10) x^3 + 64y^3 = (x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$$

به دنبال دو عدد می گردیم که حاصل ضربشان $(a.c) 2 \times 2 = 4$ و حاصل جمعشان $b = -5$ باشد. این دو عدد -4 و -1 هستند.

$$\Rightarrow 2(2x^2 - 4x - x + 2) = 2(2x^2 - 4x) - (x - 2) = [2x(x - 2) - (x - 2)]$$

$$\Rightarrow 2[(x - 2)(2x - 1)] = 2(x - 2)(2x - 1)$$

تمرین:

$$1) x^2 - x - 30 = (x - 6)(x + 5)$$

$$2) 8a^3 - 125 = (2a - 5)(4a^2 + 10a + 25)$$

$$3) a^3 - 27 = (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$$

$$4) 2x^3 - x^2 + x = x(2x^2 - x + 1)$$

☆ جلسه سوم ☆

کونیز

$$1) (a^2 - 1)(a^4 + 2a^2 + 1) = a^6 - 1$$

$$2) (2x^2 + 3y^3)^3 = 8x^6 + 3(2x^2)^2(3y^3) + 3(3y^3)^2(2x^2) + 27y^9$$

فاکتورگیری

$$1) 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 = 3x^2(x^2 - 2x + 1) = 3x^2(x - 1)^2$$

$$2) x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x + 2)(x - 3)$$

$$3) x^5 + 10x^4 + 25x^3 = x^3(x^2 + 10x + 25) = x^3(x + 5)^2$$

معادله: یک تساوی است که به ازای بعضی از مقادیر x (مجهول) برقرار می باشد برای حل یک معادله یعنی پیدا کردن مقدار مجهول (x) به دو صورت عمل می کنیم: (1) روش تجزیه ها که با کمک اتحادها حل می شود. (2) روش دلتا.

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \text{معادلات درجه اول} \\ ax^1 + c = 0 \\ 2 - \text{معادلات درجه دوم (سه می)} \\ ax^2 + bx + c = 0 \\ 3 - \text{دستگاه دو معادله دو مجهول} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{معادلات}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ضریب } x^2 \\ a \leq x^2 \\ \text{ضریب } x \\ b \leq x \\ \text{عدد ثابت} \\ c \leq \end{array} \right\} \text{روش دلتا } (\Delta)$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta: \left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \rightarrow \text{دو ریشه} \rightarrow x_1 \text{ و } x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{تک ریشه} \rightarrow x = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{بدون ریشه} \rightarrow \text{ریشه نداریم} \end{array} \right.$$

معادلات زیر را به دو روش تجزیه و دلتا حل کنید؟

روش دلتا: $1) x^2 - 5x + 6 = 0 \quad a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6)$

$$\Rightarrow 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه} \quad x_1 \text{ و } x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(1)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{array} \right.$$

روش تجزیه: $(x-2)(x-3) = 0 \quad x-2 = 0 \quad x = 2 \quad x-3 = 0 \quad x = 3$

امتحان: $(2)^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ و $(3)^2 - 5(3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

روش دلتا: یک ریشه دارد $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (4)^2 - 4(2)(2) = 16 - 16 = 0$

2) $\overset{a}{\downarrow} \textcircled{2}x^2 + \overset{b}{\downarrow} \textcircled{+4}x + \overset{c}{\downarrow} \textcircled{+2} = 0$

امتحان: $x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-4}{2(2)} = -1$ $2(-1)^2 + 4(-1) + 2 = 2 - 4 + 2 = 0$

نکته: برای حل معادلات به روش تجزیه فقط برای معادلات دو ریشه ($\Delta > 0$) کاربرد دارد.

ریشه نداریم $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$ $a = 1$ $b = 1$ $c = 1$ $3) x^2 + x + 1 = 0$

تمرین فاکتورگیری:

1) $28x^3 - 63x = 7x(4x^2 - 9) = 7x(2x - 3)(2x + 3)$ $2) \frac{x^2 \times 64}{x^2 \times x} = \frac{64}{x}$

3) $\frac{(x^2)(6x+5)}{x^2+1} = (6x+5) \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)$

تمرین معادلات:

دو ریشه دارد $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(15) = 64 - 60 = 4 > 0$ $a = 1$ $b = -8$ $c = 15$ $1) x^2 - 8x + 15 = 0$

x_1 و $x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2(1)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8+2}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{8-2}{2} = 3 \end{cases}$

روش تجزیه: $(x-3)(x-5) = 0$ $x-3=0$ $x=3$ $x-5=0$ $x=5$

امتحان: $(3)^2 - 8(3) + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$ و $(5)^2 - 8(5) + 15 = 25 - 40 + 15 = 0$

روش دلتا: دو ریشه دارد $\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(1)(12) = 64 - 48 = 16 > 0$

$$x_1 \text{ و } x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{-8+4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-8-4}{2} = -6 \end{cases}$$

روش تجزیه: $(x+6)(x+2) = 0$ $x+6=0$ $x=-6$ $x+2=0$ $x=-2$

امتحان: $(-2)^2 + 8(-2) + 12 = 4 - 16 + 12 = 0$ و $(-6)^2 + 8(-6) + 12 = 36 - 48 + 12 = 0$

روش دلتا: $3) 2x^2 - 50 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 25 = 0$ $a = 1$ $c = -25$ $\Delta = b^2 - 4ac = -4(1)(-25) = 100$

دو ریشه دارد $\Delta = 100 > 0$ $x_1 \text{ و } x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\pm \sqrt{100}}{2(1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{-10}{2} = -5 \end{cases}$

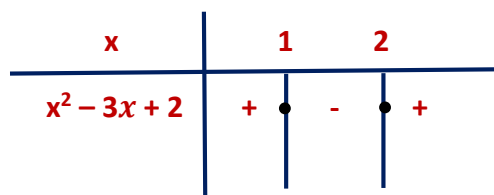
روش تجزیه: $2(x^2 - 25) = 0$ $2(x-5)(x+5) = 0$ $x-5=0$ $x=5$ $x+5=0$ $x=-5$

امتحان: $2(5)^2 - 50 = 50 - 50 = 0$ و $2(-5)^2 - 50 = 50 - 50 = 0$

تمرین تعیین علامت:

1) $16 - 4x = 0$ $-4x = -16$ $x = 4$

$$2) x^2 - 3x + 2 \leq 0 \quad (x-2)(x-1) \leq 0 \quad \begin{matrix} x-2=0 & x=2 \\ x-1=0 & x=1 \end{matrix}$$



$$x = [1 \text{ و } 2]$$

نامعادلات زیر را حل کنید.

$$1) 9x - 6 \leq 6 + 15x \quad 9x - 15x \leq 6 + 6 \quad -6x \leq 12 \quad x \leq -2$$

$$2) 7x + 3 > 14 - x \quad 7x + x > 14 - 3 \quad 8x > 11 \quad x > \frac{11}{8}$$

☆ جلسه چهارم ☆

☆ فصل دوم: تابع ☆

تابع: رابطه ای می باشد که در آن هیچ دو زوج متمایز تکراری وجود نداشته باشد و یا در صورت تکراری بودن زوج اول زوج دوم هم برابر باشد.

1- **دامنه تابع:** به مجموعه ورودی های یک تابع (x ها) دامنه تابع گویند که با نماد D_f نمایش می دهند.

2- **برد تابع:** به مجموعه خروجی های یک تابع (y ها) برد تابع گویند که با R_f نمایش می دهند.

توابع مهم ریاضی عمومی (تک متغیره)

$$1- \text{توابع چند جمله ای (خطی)} \quad ax^2 + bx + c \dots \leftarrow \text{درجه 2}$$

نکته: بزرگ ترین توان متغیر تابع چند جمله ای را درجه تابع گویند.

① R_f : برد اکثر توابع طبق قرار $R_f \cong R$ می باشد.

② **محاسبه دامنه:** دامنه تمام توابع چند جمله ای (خطی) همیشه $D_f = R = (-\infty \text{ و } +\infty)$ می باشد.

$$\text{مثال} \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad D_f = R \quad R_f = R$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = 2$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

2- تابع رادیکالی $(\sqrt{\quad})$

نکته: رادیکال هر زمان فرجه 2 داشت نوشته نمی شود. $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ فرم استاندارد رادیکال ها $\sqrt[n]{g(x)}$

نکته: فرجه 1 هیچوقت وجود ندارد.

$$R_f \cong R \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_f = D_g = R \quad \text{فرد } n-1 \\ D_f : D_g(x) : g(x) \geq 0 \quad \text{زوج } n-2 \end{array} \right\} D_f \quad (2)$$

نکته: 1) زیر رادیکال با فرجه زوج هیچگاه منفی نمی شود.

$$\sqrt{1} = 1 \quad (2)$$

$$\sqrt[1]{\quad} \quad (3)$$

4) فرجه 2 نوشته نمی شود.

مثال: دامنه و برد را بیابید.

زوج

$$1) \quad \sqrt[2]{\frac{x+5}{g(x)}}$$

$$g(x) \geq 0 \quad x+5 \geq 0 \quad x \geq -5$$

$$1) \quad R_f \cong R \quad 2) \quad D_f = \{x \mid x \geq -5\} = [-5, +\infty)$$

فرد

$$2) \quad \sqrt[5]{x+7}$$

$$1 \quad R_f \cong R \quad 2 \quad D_f = R$$

زوج

$$3) \textcircled{6} \sqrt{\frac{x+4}{g(x)}} \quad g(x) \geq 0 \quad x+4 \geq 0 \quad x \geq -4$$

$$\textcircled{1} R_f \cong R \quad \textcircled{2} D_f = \{x \mid x \geq -4\} = [-4, +\infty)$$

$$4) \sqrt{\frac{2x+3}{g(x)}} \quad g(x) \geq 0 \quad 2x+3 \geq 0 \quad 2x \geq -3 \quad x \geq \frac{-3}{2}$$

$$\textcircled{1} R_f \cong R \quad \textcircled{2} D_f = \{x \mid x \geq \frac{-3}{2}\} = [\frac{-3}{2}, +\infty)$$

3- تابع کسری: $\frac{x^2+1}{3x+4}$ و $\frac{x^5}{2}$ و $\frac{-1}{7}$

$$\textcircled{1} \text{ برد تابع کسری: } R_f \cong R$$

$\textcircled{2}$ دامنه تابع کسری: برای محاسبه دامنه تابع کسری باید به گونه ای عمل کنیم که مخرج کسر به هیچ عنوان صفر نشود زیرا اگر مخرج صفر شود تابع تعریف نشده می شود.

$$\text{صورت} \frac{0}{\text{مخرج}} = 0 \quad \text{ت ن} = \frac{\text{عدد}}{0} \xrightarrow{\text{ریشه یابی}} R = (-\infty, +\infty) \quad R = \{ \text{ت ن} \}$$

نکته: $\textcircled{1}$ در توابع کسری برای پیدا کردن دامنه تا زمانی که در صورت کسر رادیکال نباشد به آن کاری نداریم.

$$\textcircled{2} \text{ دامنه مخرج: (ریشه یابی)} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \\ \text{تجزیه} \\ \text{فاکتورگیری} \end{array} \right\} \text{عمل می کنیم.}$$

مثال: دامنه و برد را بیابید.

$$1) \frac{x^2 + x - 1}{x + 9} \quad x + 9 = 0 \quad x = -9$$

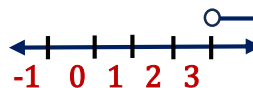
$$\textcircled{1} R_f \cong \mathbb{R} \quad \textcircled{2} D_f = \mathbb{R} - \{-9\}$$

$$2) \frac{x}{x^2 - 5x + 6} \quad \frac{(x-2)(x-3)}{x-2=0 \quad x=2} \quad x-3=0 \quad x=3$$

$$\textcircled{1} R_f \cong \mathbb{R} \quad \textcircled{2} D_f = \mathbb{R} - \{2 \text{ و } 3\}$$

$$3) \frac{x+1}{\sqrt{\frac{x-3}{g(x)}}} \quad x-3 > 0 \quad x > 3$$

$$\textcircled{1} R_f \cong \mathbb{R} \quad \textcircled{2} D_f = \{x \mid x > 3\} = (3 \text{ و } +\infty)$$



نکته: وقتی رادیکال در مخرج است $g(x)$ را بزرگ تر از صفر قرار می دهیم نه بزرگ تر مساوی صفر.

$$4) \frac{\sqrt{x-3}}{x-6} \quad \textcircled{1} R_f \cong \mathbb{R} \quad \textcircled{2} D_f: x-3 \geq 0 \quad x \geq 3$$

صورت
↑

$$\textcircled{3} D_f: x-6=0 \quad x=6 \quad D_f = \{x \mid x \geq 3 \text{ و } x \neq 6\}$$

مخرج ↑

تمرین

دامنه و برد را بیابید.

$$1) x^2 + x + 2 = 0 \quad ① R_F \cong R \quad ② D_f = R$$

$$2) x^5 - x^9 = 0 \quad ① R_F \cong R \quad ② D_f = R$$

$$3) 2x + 1 = 0 \quad ① R_F \cong R \quad ② D_f = R$$

$$4) \frac{\sqrt{x-2}}{x-4} \quad ① R_F \cong R \quad ② D_f: x-2 \geq 0 \quad x \geq 2$$

صورت
↑

$$③ D_f: x-4=0 \quad x=4 \quad D_f = \left\{ x \mid x \geq 2 \text{ و } x \neq 4 \right\}$$

مخرج
↑

$$5) \frac{x^2+5}{\sqrt{\frac{x-5}{g(x)>0}}} \quad g(x) > 0 \quad x-5 > 0 \quad x > 5$$

$$① R_F \cong R \quad ② D_F = \left\{ x \mid x > 5 \right\} = (5 \text{ و } +\infty)$$

$$6) \frac{\sqrt{x+4}}{2x+4} \quad ① R_F \cong R \quad ② D_F: x+4 \geq 0 \quad x \geq -4$$

صورت
↑

$$③ D_F: 2x+4=0 \quad 2x=-4 \quad x = \frac{-4}{2} = -2$$

مخرج
↑

$$D_F = \left\{ x \mid x \geq -4 \text{ و } x \neq -2 \right\}$$

☆ جلسه پنجم ☆

$$\frac{\sqrt[4]{x+4}}{\sqrt[6]{2x+4}}$$

$$R_f \cong \mathbb{R}$$

$$D_f: x+4 \geq 0 \quad x \geq -4$$

صورت

$$D_f: 2x+4 > 0$$

$$2x > -4$$

$$x > -2$$

$$D_f = (-2, +\infty)$$

مخرج

$$\frac{\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

$$R_f \cong \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

صورت

$$D_f: x+3 > 0$$

$$x > -3$$

$$D_f = (-3, +\infty)$$

مخرج

تمرین

$$1) \frac{x^2+x-1}{\sqrt{2x+3}}$$

$$R_f \cong \mathbb{R}$$

$$D_f: 2x+3 > 0$$

$$2x > -3$$

$$x > -\frac{3}{2}$$

$$D_f = \left\{ x \mid x > -\frac{3}{2} \right\}$$

$$2) \frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{x-6}}$$

$$R_f \cong \mathbb{R}$$

$$D_f: x-7 \geq 0$$

$$x \geq 7$$

$$D_f: x-6 > 0$$

$$x > 6$$

$$D_f = [7, +\infty)$$

صورت

مخرج

$$3) \frac{\sqrt{x-5}}{x+2}$$

$$R_f \cong \mathbb{R}$$

$$D_f: x-5 \geq 0$$

$$x \geq 5$$

$$D_f: x+2 = 0$$

$$x = -2$$

صورت

مخرج

$$D_f = \left\{ x \mid x \geq 5 \right\} \text{ یا } [5, +\infty)$$

$$4) \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$$

$$R_f \cong \mathbb{R}$$

$$D_f: x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$D_f: x > 0$$

$$D_f = [1, +\infty)$$

صورت

مخرج

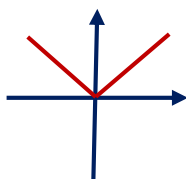
$$5) \frac{101\sqrt{x+\frac{2}{3}}}{78\sqrt{x-\frac{1}{2}}} \quad R_f \cong R \quad D_f = R \quad D_f: x - \frac{1}{2} > 0 \quad x > \frac{1}{2} \quad D_f = \left\{ x \mid x > \frac{1}{2} \right\} \text{ یا } \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

$\uparrow$ صورت $\uparrow$ مخرج

4- توابع چند ضابطه ای:

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & D_{f_1} \\ f_2 & D_{f_2} \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



5- تابع قدر مطلق: $||$ خروجی را + می کند.

زیر مجموعه ای از توابع چند ضابطه ای

$$[1, 9] = 1 \quad [-0, 9] = -1$$

شیفت عدد به عقب (عدد بدون اعشار)

6- تابع جزء صحیح: $[]$ پله ای (براکتی)

7- تابع لگاریتمی: Log

نکات مهم لگاریتم

Log_a^x

$\uparrow$ مبنا

(1) a مبنای لگاریتم می باشد که هیچ وقت 1 نمی شود. (2) لگاریتم هایی که مبنا ندارند مبنای آن ها 10 می شود. $\log_{10} 8$ (3) لگاریتم صفر وجود ندارد. (4) لگاریتم هر عدد در مبنای خودش 1 می شود. $\log_7 7 = 1$

تمرین توابع Log

توابع زیر را بیابید.

$$1) 10\log \left(\frac{ab}{c} \right) = 10\log \frac{a}{c} + 10\log \frac{b}{c}$$

$$2) 10\log 15 = 10\log 5 + 10\log 3$$

$$3) 10\log \frac{a}{b} = 10\log \frac{a}{c} - 10\log \frac{b}{c}$$

$$4) 10\log 5 = 10\log \frac{10}{2} = 10\log 10 - 10\log 2 = 10 - 10\log 2$$

$$5) 10\log \frac{a^n}{b^m} = \frac{n}{m} 10\log \frac{a}{b}$$

$$6) 10\log 27 = 10\log 9 + 10\log 3$$

$$7) 10\log \frac{1000}{100} = 10\log \frac{10^3}{10^2} = \frac{3}{2} 10\log \frac{10}{10} = \frac{30}{2} = 15$$

8 - تابع لگاریتم طبیعی: $\ln x$

$$\log_e x = \ln x$$

$$\text{حفظ} \quad \begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \ln e = 1 \end{cases}$$

$$e = 2,7$$

9 - تابع نمایی: $e \leftarrow$ نپر

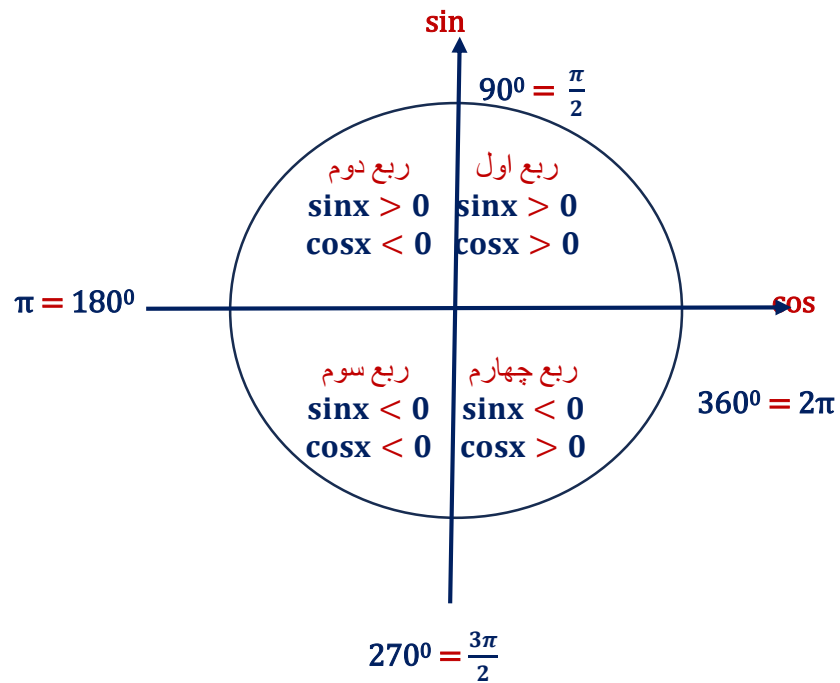
10- توابع مثلثاتی:

1) $\sin x$

2) $\cos x$

3) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

4) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$



یگا: درجه - رادیان - گراد

11- توابع معکوس مثلثاتی:

$(\sin x)^{-1} = \text{Arc } \sin x$

$(\cos x)^{-1} = \text{Arc } \cos x$

$(\tan x)^{-1} = \text{Arc } \tan x$

$(\cot x)^{-1} = \text{Arc } \cot x$

تمرین

حاصل توابع را بدست بیاورید.

1) $\sin 0 = 0$

2) $\cos \frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\cos 0 = 1$

$$5) \sin 2\pi = \sin 360^\circ = 0$$

$$6) \sin \frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$7) \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{Arc sin } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

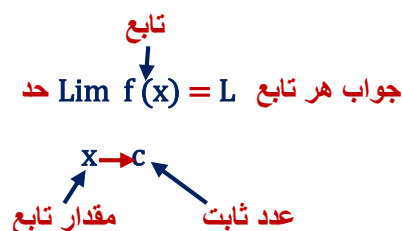
$$8) \cos \frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$9) \cos^{-1} \frac{1}{2} = \text{Arc cos } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

☆ جلسه ششم ☆

☆ فصل سوم: حد و پیوستگی (Limite) ☆

حد: مقداری که یک تابع با نزدیک شدن ورودی به آن نزدیک می شود. حد یک مفهوم اساسی و مهم در ریاضیات می باشد که پیش نیاز پیوستگی، مشتق، هوییتال و انتگرال که در ریاضی عمومی و کاربردی می خوانیم. (حد به معنای رفتار یک تابع می باشد که مرز حدودی را مشخص می کند.)



در تابع $f(x)$ زمانی که x به سمت c میل می کند برابر L می باشد.

برای محاسبه ی حدود یا حد باید حد چپ و حد راست محاسبه گردد و در صورت برابر بودن حد چپ و راست تابع ما حد دارد. اما اگر حد چپ با راست برابر نبود پس تابع ما حد ندارد.

$$x \rightarrow x_0 \text{ و } x_0 \in \mathbb{R} = (-\infty \text{ و } +\infty) \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow \begin{cases} ① x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow 2^+ & \text{حد راست (از سمت راست)} \\ ② x \rightarrow x_0^- \Rightarrow 2^- & \text{حد چپ (از سمت چپ)} \end{cases}$$

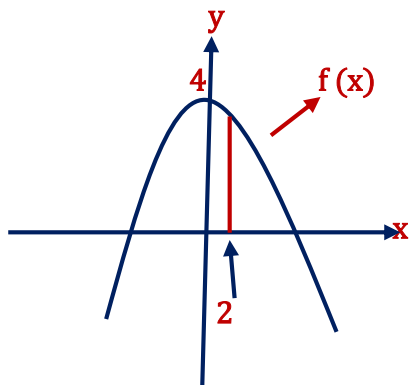
حد بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

$$x \rightarrow 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

$$x \rightarrow 2$$

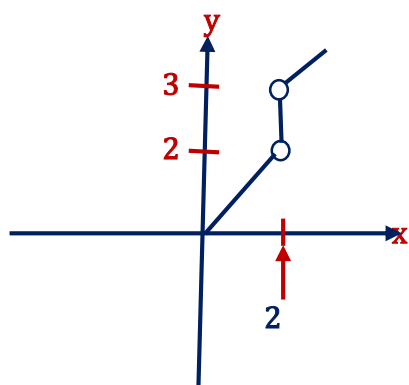


$$\begin{cases} 1) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \\ 2) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 = 4$$

نکته: حد یعنی فرمول و جایگذاری x به جای آن

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

$$x \rightarrow 2$$



$$\begin{cases} 1) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \\ 2) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \end{cases} \quad \text{حد ندارد. } 2 \neq 3$$

رفع ابهام

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 = 1 + 1 = 2$$

مبهم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$



	$x \rightarrow 1^-$			
x	0,9	0,99	0,999	
$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$	1,9	1,99	1,999	$\cong 2$

حد کلی 2 $\Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow$

	$x \rightarrow 1^+$			
x	1,1	1,01	1,001	
$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$	2,1	2,01	2,001	$\cong 2$

حد توابع

1- حد توابع چند جمله ای: برای محاسبه حد توابع چند جمله ای که دامنه ی آن ها مساوی $\mathbb{R}$ یا اعداد حقیقی بود نیازی نیست حد چپ و راست محاسبه گردد. برای محاسبه آن فقط در x عدد را جایگذاری می کنیم.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 1 \Rightarrow 1^2 + 1 - 1 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 1 = 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 4x - 0 \Rightarrow 3^2 + 4(3) - 0 = 9 + 12 = 21 \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 4x - 0 = 21$$

$$x \rightarrow 3$$

$$x \rightarrow 3$$

2- حد توابع رادیکالی: برای محاسبه حد توابع رادیکالی باید حد چپ و راست محاسبه گردد و اگر برابر بود که حد دارد اگر برابر نبود حد ندارد.

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \quad D_f = [0 \text{ و } +\infty) \quad \begin{cases} 1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ 2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = \text{ت ن} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{حد ندارد} \\ \Rightarrow \text{ت ن} \neq 0 \end{matrix}$$

زیر رادیکال منفی نمیشه

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 1} \quad D_f = [0 \text{ و } +\infty) \quad \begin{cases} 1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2} \\ 2) \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{حد کلی}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x-1} \quad D_f = [0 \text{ و } +\infty) \quad \begin{cases} 1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x-1} = \text{ت ن} \\ 2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x-1} = \text{ت ن} \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد.}$$

3- حد توابع جزء صحیح (براکتی): برای محاسبه حد توابع جزء صحیح باید مانند رادیکالی حد چپ و راست محاسبه گردد.

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} [x] \quad \begin{cases} 1) \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1 \\ 2) \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0 \end{cases} \quad 1 \neq 0 \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x] \quad \begin{cases} 1) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [x] = 0 \\ 2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} [x] = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{حد کلی}$$

4- حد توابع چند ضابطه ای: برای محاسبه حد چند ضابطه ای (دو ضابطه ای) باز هم نیاز به حل حد چپ و راست داریم.

مهم: در تابع زیر مقدار a و b را چنان بیابید که حد چپ و راست در نقطه مذکور به ترتیب 3 و 5 باشد.

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx & ; x > 2 \\ 2ax - 3b & ; x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{حد راست} = 5 \\ \text{حد چپ} = 3 \end{matrix}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^2 + 2bx = 5 \Rightarrow a(2)^2 + 2(b)(2) \Rightarrow 4a + 4b = 5$$

$$x \rightarrow 2^+$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} 2ax - 3b = 3 \Rightarrow 2a(2) - 3b = 3 \Rightarrow 4a - 3b = 3$$

$$x \rightarrow 2^-$$

$$-x \begin{cases} 4a - 3b = 3 \\ 4a + 4b = 5 \end{cases} \begin{cases} -4a + 3b = -3 & 7b = 2 & b = \frac{2}{7} \\ 4a + 4b = 5 & 4a - 3\left(\frac{2}{7}\right) = 3 \Rightarrow 4a - \frac{6}{7} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4a = 3 + \frac{6}{7} \Rightarrow 4a = \frac{21+6}{7} \Rightarrow 4a = \frac{27}{7} \quad a = \frac{\frac{27}{7}}{\frac{4}{1}} \Rightarrow a = \frac{27}{28}$$

تمرین

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$x \rightarrow 0$$

☆ جلسه هفتم ☆

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$x \rightarrow 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x) = (-1^3 - 1) = -1 - 1 = -2$$

$$x \rightarrow -1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 10} \sqrt[3]{x - 2} = \sqrt[3]{10 - 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$x \rightarrow 10$$

رفع ابهام حد

اگر دامنه ی تابعی زیر مجموعه ای از R باشد و جواب حد کسری ما جوابش $\frac{0}{0}$ شود یعنی این کسر مبهم است.

برای رفع ابهام حد باید عامل مبهم در مخرج و صورت شناسایی شود و حذف گردد.

روش های رفع ابهام حد (ساده سازی) $\left. \begin{array}{l} \text{1- تجزیه (اتحاد)} \\ \text{2- حذف رادیکالی (مزدوج)} \\ \text{3- فاکتور گیری} \\ \text{4- دلتا } \Delta \end{array} \right\}$

مثال

$$\text{1) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(1)^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \quad (x^2-1) = (x+1)(x-1)$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\text{رفع ابهام} \quad \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1 = 1+1 = 2$$

$$\text{2) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{2^2+2-6}{2^2-4} = \frac{4+2-6}{4-4} = \frac{0}{0}$$

$$x \rightarrow 2$$

$$\text{رفع ابهام} \quad \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{5}{4}$$

$$\text{3) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\text{4) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\frac{(x^2-1)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = (1+1)(1+1) = 4$$

حدهای بی نهایت (∞):

بی نهایت یک عدد مشخص نمی باشد و عدد خیلی خیلی بزرگی می باشد.

$$1) \frac{a}{0^+} \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} +a \\ -a \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{-7}{0^+} = -\infty \\ \frac{6}{0^+} = +\infty \end{matrix}$$

$$2) \frac{a}{0^-} \begin{cases} +\infty & a < 0 \\ -\infty & a > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} -a \\ +a \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{-1000}{0^-} = +\infty \\ \frac{99}{0^-} = -\infty \end{matrix}$$

مثال

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \begin{cases} \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \frac{1}{0^-} = +\infty \end{cases} \rightarrow +\infty \quad \text{توان دو حد دارد}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \begin{cases} \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases} \rightarrow +\infty \quad \text{حد ندارد}$$

$$x \rightarrow 0$$

نکته برای بدست آوردن حد این توابع اگر توان زوج داشت حد چپ و حد راست محاسبه نمی گردد.

(توان زوج علامتش مثبت است)

ادامه ی قوانین حد (مبهم)

$$3) a \times (+\infty) \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$$

$$4) a \times (-\infty) \begin{cases} -\infty & a > 0 \\ +\infty & a < 0 \end{cases}$$

قوانین حفظی

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$a - \infty = \infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$+\infty - \infty = \text{مبهم}$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$0 \cdot (-\infty) = \text{مبهم}$$

$$0 \cdot (+\infty) = \text{مبهم}$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$a \cdot (+\infty) = +\infty$$

تمرین

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 1}{x^3 + 2x - 1} = \frac{3(1)^3 - 1}{1^3 + 2(1) - 1} = \frac{2}{1 + 2 - 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x} = \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow 4$$

$$\text{رفع ابهام} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 4}{(4 - x)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\cancel{x - 4}}{-(-\cancel{4} + x)(\sqrt{x} + 2)} \quad x = 4 \Rightarrow \frac{1}{-\sqrt{4} - 2} = \frac{1}{-2 - 2} = \frac{1}{-4}$$

$\uparrow$
 $x - 4$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4} = \frac{4 - 4}{(4)^2 - 5(4) + 4} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow 4$$

$$\text{رفع ابهام} \Rightarrow \frac{\cancel{x - 4}}{(x - 1)(\cancel{x - 4})} \quad x = 4 \Rightarrow \frac{1}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

مثال:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = \frac{6}{3^- - 3} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$x \rightarrow 3^-$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+3}{1-x} = \frac{2(1^+)+3}{1-1^+} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-1}{x^5} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^6} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-7}{x^3} = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

نکته: در فاکتورگیری برای پیدا کردن عامل مبهم ، اگر عدد عامل مشترک را نداشت ، عدد را بر عامل مشترک تقسیم می کنیم.

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{+\infty-1}{2(+\infty)+1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{مبهم} \Rightarrow \frac{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}{\cancel{x}(2+\frac{1}{x})} = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x+3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{مبهم} \Rightarrow \frac{\cancel{x}(x-\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1+\frac{3}{x})} = \frac{x}{1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x) = (+\infty - 2(+\infty)) = +\infty - \infty = \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow x(x-2) = \infty(\infty-2) = \infty(\infty) = +\infty$$

تمرین:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^6} = \frac{-1}{(-0,1)^6} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{2x^2+4} = \frac{+\infty-3}{2(+\infty)^2+4} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\text{رفع ابهام} \quad \frac{x(1-\frac{3}{x})}{x(2x+\frac{4}{x})} = \frac{1-\frac{3}{x}}{2x+\frac{4}{x}} = \frac{1-\frac{3}{+\infty}}{2x+\frac{4}{+\infty}} = \frac{1-0}{2x+0} = \frac{1}{2(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 8x + 3) = (5(-\infty)^3 - 8(-\infty) + 3) = -\infty + \infty \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow -$$

$$\text{رفع ابهام} \quad x(5x^2 - 8 + \frac{3}{x}) = -\infty(+\infty - 8 + \frac{3}{-\infty}) = -\infty(+\infty + 0) = -\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3x}{3-2x^2} = \frac{(-\infty)^2+3(-\infty)}{3-2(-\infty)^2} = \frac{+\infty-\infty}{-\infty} \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\text{رفع ابهام} \quad \frac{x^2(1+\frac{3}{x})}{x^2(\frac{3}{x^2}-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3-7x+1}{2x^2+3} = \frac{4(+\infty)^3-7(+\infty)+1}{2(+\infty)^2+3} = \frac{+\infty-\infty}{+\infty} \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\text{رفع ابهام} \quad \frac{x^2(4x-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{3}{x^2})} = \frac{4x}{2} = 2x = 2(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

پیوستگی: تابع f را در نقطه $x = a$ پیوسته گوئیم هرگاه:

$$x \rightarrow a$$

شروط پیوستگی: (1) حد چپ - حد راست (2) حد داشته باشد (3) مقدار حد - مقدار تابع

پیوسته بودن تابع زیر را در نقطه مذکور بررسی نمایید.

$$\text{مثال توضیحی} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\text{نیازی به رفع ابهام نیست} \Rightarrow \text{مقدار تابع} = f(1) = \frac{(1)^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \text{مبهم} \Rightarrow \frac{(x \cancel{-} 1)(x + 1)}{x \cancel{-} 1} = x + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{ناپیوسته} \quad 2 \neq \frac{0}{0}$$

$$x \rightarrow 1$$

مثال: مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)$ در نقطه مذکور پیوستگی داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx & ; x < 2 \\ 3 & ; x = 2 \\ -2ax - 3b & ; x > 2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2ax - 3b) = 3 \rightarrow -4a - 3b = 3 \rightarrow \boxed{b = 6} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 2bx) = 3 \rightarrow 4a + 4b = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow 4a + 4(6) = 3 \rightarrow 4a = 3 - 24 \rightarrow \boxed{a = -\frac{21}{4}}$$

مثال: مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)$ در نقطه مذکور پیوستگی داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & ; x > -2 \\ 5 & ; x = -2 \\ bx^2 + 2x & ; x < -2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 5$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} 2ax + b = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} bx^2 + 2x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4a + b = 5 \\ 4b - 4 = 5 \end{cases} \rightarrow \boxed{b = \frac{9}{4}}$$

$$\rightarrow -4a + \left(\frac{9}{4}\right) = 5 \rightarrow \boxed{a = -\frac{11}{16}}$$

تمرین: مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)$ در نقطه مذکور پیوستگی داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & ; x \geq 1 \\ 2ax - 3b & ; x < 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} ax^2 + bx - 1 = a + b - 1 \\ x \rightarrow 1 \end{matrix}$$

نقطه مذکور

1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx - 1 = a + b - 1$

$x \rightarrow 1^+$

2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2ax - 3b = 2a - 3b$

$x \rightarrow 1^-$

$a + b - 1 = a + b - 1$

↑
معادله اول

$2a - 3b = a + b - 1$

↑
معادله دوم

$a - 4b = -1$

20 قانون

تعریف مشتق: مشتق یکی از مباحث مهم ریاضی عمومی می باشد که پیش نیاز قاعده ی هوییتال و مبحث انتگرال می باشد. که باید حتماً قوانین مشتق حفظ گردد.

مشتق نرخ تغییرات تابع را نشان می دهد که به معنای یافتن خط مماس در یک نقطه از منحنی است مشتق ها هم همانند حد چپ و راست دارند و گاهی بعضی از توابع مشتق ندارند. همچنین مشتق را با نماد ' () نشان می دهیم.

$$f(x) \rightarrow f'(x) \quad y \rightarrow y' \quad s' \rightarrow s'' \quad (f(x))'$$

فرمول های زیر جهت اثبات قوانین مشتق کاربرد دارد.

2 تا فرمول که از حد سر منشأ می گیرند.

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow a \in D_f \Rightarrow f'(x)$$

$$x \rightarrow a$$

$$2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$h \rightarrow 0$$

توضیح فرمول های مشتق: حد تابع $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ وقتی $a \in D_f$ باشد و $x \rightarrow a$ میل کند به ما مشتق می دهد.

قوانین مهم و پر کاربرد و حفظی مشتق:

قانون اول) مشتق اعداد ثابت برابر صفر است.

عدد ثابت

$$1) f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$

عددی که ضریب انگلیسی و متغیر نداشته باشد = عدد ثابت

مثال)

1) $y = 3 \rightarrow y' = 0$

2) $f(x) = \pi \rightarrow f'(x) = 0$

3) $z = 0 \rightarrow z' = 0$

4) $f(x) = 1,000,000 \rightarrow f'(x) = 0$

5) $f(x) = -1,2 \rightarrow f'(x) = 0$

6) $s = \sqrt[3]{15} \rightarrow s' = 0$

قانون دوم) مهم ترین قانون مشتق و کلید مشتق می باشد. قانون مشتق توابع توان دار می باشد که توان در ضرب ضرب می شود و یک عدد از توان کم می شود.

2) $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

مثال)

1) $f(x) = 3x^3 \rightarrow f'(x) = 9x^2$

3) $(\frac{10}{7} x^4)' = \frac{40}{7} x^3$

2) $y = x^2 \rightarrow y' = 2x$

4) $f(y) = 5(2y^4) \rightarrow f'(y) = 40y^3$

این قانون از بقیه مهم تر است.

5) $z = 10(3x^2) \rightarrow z' = 60x$

قانون سوم) قانون جمع و تفریق مشتق که به صورت یا برابر است با مشتق اول $\pm$ مشتق دوم و

3) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

تابع دوم تابع اول

مثال)

1) $M = 3x^4 + 12x^2 - 3x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

$M' = 12x^3 + 24x - 3$



نکته: مشتق توابع توان دار یک برابر ضریب می باشد.

$$f(x) = \frac{10}{3}x \quad f'(x) = \frac{10}{3} \quad f'(9x) = 9$$

2) $f(x) = \frac{14}{9}x^2 + 5x^2 - \frac{7}{3} + x^3 - 1 + 0$

$$f'(x) = \frac{28}{9}x + 10x + 3x^2$$

قانون چهارم) مشتق قانون ضرب که مشتق تابع اول ضرب در تابع دوم + مشتق تابع دوم در تابع اول.

4) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

(مثال)

1) $((x^5 + x^2 - 1) \cdot (4x^4 - x^2 - \frac{1}{2}))'$

$$: (5x^4 + 2x)(4x^4 - x^2 - \frac{1}{2}) + (16x^3 - 2x)(x^5 + x^2 - 1)$$

مهم

2) $((\frac{10}{3}x^2 + 9x^4 - \frac{3}{2}x + 0) \cdot (x^4 - 2x + 1))'$

$$: (\frac{20}{3}x + 36x^3 - \frac{3}{2})(x^4 - 2x + 1) + (4x^3 - 2)(\frac{10}{3}x + 9x^4 - \frac{3}{2}x + 0)$$

قانون پنجم) مشتق توابع کسری که عبارت است از مشتق صورت ضرب در مخرج - مشتق مخرج در صورت بر روی مخرج به توان دو.

5) $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$

(مثال)

1) $(\frac{x^2 + x - 1}{(3x^5 - 1)})' = \frac{(2x + 1)(3x^5 - 1) - (15x^4)(x^2 + x - 1)}{(3x^5 - 1)^2}$

تمرین

1) $Z: (2x^3 + 7x - 2) (x^{15} - 4x^5 + \frac{20}{2}x)$

$Z' = (6x^2 + 7) (x^{15} - 4x^5 + \frac{20}{2}x) + (15x^{14} - 20x^4 + \frac{20}{2}) (2x^3 + 7x - 2)$

2) $S: 2x^7 - 7x^9 + 6x - \frac{7}{2}x - \pi + \sqrt{2} + 1$

$S' = 14x^6 - 63x^8 + 6 - \frac{7}{2}$

3) $(\frac{x^7 + 6x^2 - \pi}{2x^2 + 5})'$

$$\frac{(7x^6 + 12x)(2x^2 + 5) - (4x)(x^7 + 6x^2 - \pi)}{(2x^2 + 5)^2}$$

☆ جلسه دهم ☆

قانون ششم

6) $f(x) = \sqrt[2]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

اثبات $\rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال

$f(x) = \sqrt{x} + x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$

قانون هفتم

$$7) f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\text{اثبات} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

مثال

$$\left(\frac{-\infty}{x}\right)' = \frac{+\infty}{x^2}$$

$$\left(\frac{-2}{x}\right)' = -\left(\frac{-2}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$$

$$\text{نکته دار} \rightarrow \left(\frac{3}{x}\right)' = \frac{-3}{x^2}$$

مثال

$$1) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} - x^2 + x - 0\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} - 2x + 1$$

$$2) f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right) \left(x^2 + 2x - x + \frac{10,000}{3} - 9x^5\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}\right) \left(x^2 + 2x - x + \frac{10,000}{3} - 9x^5\right) + \left(\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right) (2x + 2 - 1 - 45x^4)$$

قانون هشتم

$$8) (u^n)' = n u^{n-1} \cdot u'$$

تابع u بر حسب u'

$$f(x) = u$$

مثال

$$1) f(x) = (3x^2 + \sqrt{x} - 1)^5$$

$$f'(x) = 5(3x^2 + \sqrt{x} - 1)^4 \cdot \left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$2) f(x) = (x^2 + x)^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 2(x^2 + x) \cdot (2x + 1) \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) (x^2 + x)^2$$

$$3) ((\sqrt{x})^5)' = 5(\sqrt{x})^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) f(x) = \sqrt{x^2 + x} = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \times (2x + 1)}{2}$$

ادامه قانون ها

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x$$

$$11) (\tan x)' = (1 + \tan^2 x)$$

$$12) (\cot x)' = -(1 + \cot^2 x)$$

$$13) (\text{Arc } \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) (\text{Arc } \cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15) (\text{Arc } \tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16) (\text{Arc } \cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

مثال

$$1) g(x) = \frac{\sin x}{\cos x - x} = g'(x) = \frac{\cos x \cdot (\cos x - x) - (-\sin x - 1) \cdot \sin x}{(\cos x - x)^2}$$

$$2) f(x) = \cos x \cdot (1 + \tan x) \rightarrow f'(x) = (-\sin x)(1 + \tan x) + (1 + \tan^2 x)(\cos x)$$

$$3) (\text{Arc } \sin x) \cdot (\cot x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) (\cot x) + (-1 - \cot^2 x) (\text{Arc } \sin x)$$

$$4) \text{Arc } \tan x - \cot x + \frac{x}{2} - \sqrt{x} + 3x^2 = \frac{1}{1+x^2} - (1 + \cot^2 x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 6x$$

$$5) \frac{\text{Arc } \cos x - x + \sqrt{x} - \frac{1}{x}}{\text{Arc } \tan x + x^2 - 3x} = \frac{\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)(\text{Arc } \tan x + x^2 - 3x) - \left(\frac{1}{1+x^2} + 2x - 3\right)(\text{Arc } \cos x - x + \sqrt{x} - \frac{1}{x})}{(\text{Arc } \tan x + x^2 - 3x)^2}$$

تمرین

$$1) f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)} = (x^2 - x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (x^2 - x)^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 1)$$

$$2) f(x) = \sqrt{(x^4 + \frac{1}{x})} = (x^4 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^4 + \frac{1}{x})^{-\frac{1}{2}} \times (4x^3 - \frac{1}{x^2})$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 + x} = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \times (2x + 1)$$

☆ جلسه یازدهم ☆

ادامه قانون های مشتق

مشتق کمان × مشتق نسبت × مشتق توان = (مشتق مثلثاتی کلی) (17)

مثال

$$1) f(x) = (\tan^5 x)' = 5 \tan^4 x \times (1 + \tan^2 x) \times 1$$

$$2) f(x) = (\sin^3 \sqrt{x})' = 3 \sin^2 \sqrt{x} \times \cos \sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3) f(x) = \left(2 \cos^3 \frac{1}{x}\right)' = 6 \cos^2 \frac{1}{x} \times \left(-\sin \frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2}$$

$$18) (e^x)' = e^x$$

خودش = تابع نهایی

مثال

$$1) (e^x + 1)' = e^x + 0 = e^x$$

$$19) (e^u)' = u' \times e^u \quad u \text{ تابع جداگانه بر حسب } x \text{ می باشد.}$$

مثال

$$1) f(x) = (e^{\sin x + \sqrt{x}})' = (\sin x + \sqrt{x})' \times e^{\sin x + \sqrt{x}} \\ = (\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}}) \times e^{\sin x + \sqrt{x}}$$

$$2) f(x) = \left(\frac{e^{x+\sqrt{x}}}{1-x+x} \right)' \\ = \frac{(e^{x+\sqrt{x}})' (1-x+x) - (e^{x+\sqrt{x}}) (-1+1)}{(1-x+x)^2}$$

$$20) (Ln x)' = \frac{1}{x}$$

مثال

$$1) (Ln x + e^x + \sqrt{x} - \frac{1}{x} + x - \tan x + 3x^2 - 9)' \\ = \frac{1}{x} + e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + 1 - (1 + \tan^2 x) + 6x - 0$$

$$21) (Ln u)' = \frac{u'}{u} \quad u \text{ تابع بر حسب } x$$

مثال

$$1) (Ln \sqrt{x})' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$2) (Ln \sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$3) \underbrace{(\ln e^x + \cos \sqrt{x})}_{u'} = \frac{(e^x - \sin \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{e^x + \cos \sqrt{x}}$$

نمونه سوال امتحانی)

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x} + \ln x - e^x + \sqrt{x} - \sin x + 2x^3 - x + 1 + \pi \right)'$$

$$= 4x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x + 6x - 1 + 0 + 0$$

تمرین)

$$1) f_1'(x) = 3 \cos x - x \sin x$$

$$f_1'(x) = 3(-\sin x)(1) - ((1)(\sin x) + (\cos x)(x))$$

$$2) f_2'(x) = e^x \sin^3 x$$

$$f_2'(x) = e^x (\sin^3 x) + (3 \sin^2 x (\cos x)(1)) (e^x)$$

$$3) f_3'(x) = x^3 \ln x$$

$$f_3'(x) = 3x^2 (\ln x) + \left(\frac{1}{x} \right) (x^3)$$

$$4) f_4'(x) = e^x \sin 2x$$

$$f_4'(x) = e^x (\sin 2x) + (\cos 2x)(2)(e^x)$$

$$5) f_5'(x) = (x^2 + x)(e^x + 1)$$

$$f_5'(x) = (2x + 1)(e^x + 1) + (e^x)(x^2 + x)$$

$$6) f_6'(x) = e^x \cos e^x$$

$$f_6'(x) = (e^x)(\cos e^x) + (-\sin e^x)(e^x)(e^x)$$

$$7) f_7'(x) = \tan(2x + 1)$$

$$f_7'(x) = (1 + \tan^2(2x + 1))(2)$$

$$8) f_8'(x) = \ln(\cos 2x)$$

$$f_8'(x) = \frac{(-\sin 2x)(2)}{\cos 2x}$$

$$9) f_9'(x) = \cos(\ln x)$$

$$f_9'(x) = (-\sin(\ln x)) \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$10) f_{10}'(x) = (3x - x^3)^5$$

$$f_{10}'(x) = 5(3x - x^3)^4(3 - 3x^2)$$

$$11) f_{11}'(x) = (x^2 + 1)^5(x^3 - x)^4$$

$$f_{11}'(x) = 5(x^2 + 1)^4(2x)(x^3 - x)^4 + 4(x^3 - x)^3(3x^2 - 1)(x^2 + 1)^5$$

$$12) f_{12}'(x) = (2 + \ln x)(e^x + 3)$$

$$f_{12}'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(e^x + 3) + (e^x)(2 + \ln x)$$

مثال: دامنه و برد را بیابید.

زوج

$$1) \textcircled{2} \sqrt{\frac{x+5}{g(x)}}$$

$$g(x) \geq 0 \quad x+5 \geq 0 \quad x \geq -5$$

$$\textcircled{1} R_f \cong \mathbb{R} \quad \textcircled{2} D_f = \{x \mid x \geq -5\} = [-5, +\infty)$$

فرد

$$2) \textcircled{5} \sqrt{x+7}$$

$$1) R_f \cong \mathbb{R} \quad 2) D_f = \mathbb{R}$$

زوج

$$3) \textcircled{6} \sqrt{\frac{x+4}{g(x)}}$$

$$g(x) \geq 0 \quad x+4 \geq 0 \quad x \geq -4$$

$$\textcircled{1} R_f \cong \mathbb{R} \quad \textcircled{2} D_f = \{x \mid x \geq -4\} = [-4, +\infty)$$

$$4) \sqrt{\frac{2x+3}{g(x)}}$$

$$g(x) \geq 0 \quad 2x+3 \geq 0 \quad 2x \geq -3 \quad x \geq \frac{-3}{2}$$

$$\textcircled{1} R_f \cong \mathbb{R} \quad \textcircled{2} D_f = \{x \mid x \geq \frac{-3}{2}\} = [\frac{-3}{2}, +\infty)$$

مثال: دامنه و برد را بیابید.

$$1) \frac{x^2 + x - 1}{x + 9} \quad x + 9 = 0 \quad x = -9$$

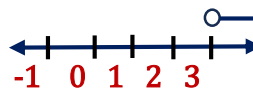
$$① R_f \cong R \quad ② D_f = R - \{-9\}$$

$$2) \frac{x}{x^2 - 5x + 6} \quad \frac{(x-2)(x-3)}{x-2=0 \quad x=2} \quad x-3=0 \quad x=3$$

$$① R_f \cong R \quad ② D_f = R - \{2 \text{ و } 3\}$$

$$3) \frac{x+1}{\sqrt{\frac{x-3}{g(x)}}} \quad x-3 > 0 \quad x > 3$$

$$① R_f \cong R \quad ② D_f = \{x \mid x > 3\} = (3 \text{ و } +\infty)$$



مثال)

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(1)^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \quad (x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\text{رفع ابهام} \quad \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{2^2 + 2 - 6}{2^2 - 4} = \frac{4 + 2 - 6}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$x \rightarrow 2$$

$$\text{رفع ابهام} \quad \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{5}{4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$x \rightarrow 1$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{مهم}$$

$$\frac{(x^2-1)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\cancel{x-1})(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = (1+1)(1+1) = 4$$

مثال)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \begin{cases} \nearrow \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \searrow \frac{1}{0^-} = +\infty \end{cases} \rightarrow +\infty \quad \text{توان دو حد دارد}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \begin{cases} \nearrow \frac{1}{0} = +\infty \\ \searrow \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases} \rightarrow +\infty \quad \text{حد ندارد}$$

$$x \rightarrow 0$$

مثال:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = \frac{6}{3^- - 3} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$x \rightarrow 3^-$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+3}{1-x} = \frac{2(1^+)+3}{1-1^+} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-1}{x^5} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^6} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-7}{x^3} = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

مثال: مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)$ در نقطه مذکور پیوستگی داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx & ; x < 2 \\ 3 & ; x = 2 \\ -2ax - 3b & ; x > 2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2ax - 3b) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 2bx) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4a - 3b = 3 \\ 4a + 4b = 3 \end{cases} \rightarrow \boxed{b = 6}$$

$$\rightarrow 4a + 4(6) = 3 \rightarrow 4a = 3 - 24 \rightarrow \boxed{a = -\frac{21}{4}}$$

مثال: مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)$ در نقطه مذکور پیوستگی داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & ; x > -2 \\ 5 & ; x = -2 \\ bx^2 + 2x & ; x < -2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 5$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} 2ax + b = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} bx^2 + 2x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4a + b = 5 \\ 4b - 4 = 5 \end{cases} \rightarrow \boxed{b = \frac{9}{4}}$$

$$\rightarrow -4a + \left(\frac{9}{4}\right) = 5 \rightarrow \boxed{a = -\frac{11}{16}}$$

مثال

1) $y = 3 \rightarrow y' = 0$

2) $f(x) = \pi \rightarrow f'(x) = 0$

3) $z = 0 \rightarrow z' = 0$

4) $f(x) = 1,000,000 \rightarrow f'(x) = 0$

5) $f(x) = -1,2 \rightarrow f'(x) = 0$

6) $s = \sqrt[3]{15} \rightarrow s' = 0$

مثال

1) $f(x) = 3x^3 \rightarrow f'(x) = 9x^2$

2) $y = x^2 \rightarrow y' = 2x$

این قانون از بقیه مهم تر است.

3) $(\frac{10}{7} x^4)' = \frac{40}{7} x^3$

4) $f(y) = 5(2y^4) \rightarrow f'(y) = 40y^3$

5) $z = 10(3x^2) \rightarrow z' = 60x$

مثال

1) $M = 3x^4 + 12x^2 - 3x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

$M' = 12x^3 + 24x - 3$

2) $f(x) = \frac{14}{9}x^2 + 5x^2 - \frac{7}{3} + x^3 - 1 + 0$

$f'(x) = \frac{28}{9}x + 10x + 3x^2$

مثال

1) $((x^5 + x^2 - 1) \cdot (4x^4 - x^2 - \frac{1}{2}))'$

$:(5x^4 + 2x)(4x^4 - x^2 - \frac{1}{2}) + (16x^3 - 2x)(x^5 + x^2 - 1)$

مهم

2) $(\frac{10}{3}x^2 + 9x^4 - \frac{3}{2}x + 0) \cdot (x^4 - 2x + 1)'$

$:(\frac{20}{3}x + 36x^3 - \frac{3}{2})(x^4 - 2x + 1) + (4x^3 - 2)(\frac{10}{3}x + 9x^4 - \frac{3}{2}x + 0)$

مثال

$$1) \left(\frac{x^2 + x - 1}{(3x^5 - 1)} \right)' = \frac{(2x + 1)(3x^5 - 1) - (15x^4)(x^2 + x - 1)}{(3x^5 - 1)^2}$$

مثال

$$f(x) = \sqrt{x} + x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$$

مثال

$$\left(\frac{-\infty}{x} \right)' = \frac{+\infty}{x^2} \qquad \left(\frac{-2}{x} \right)' = -\left(\frac{-2}{x^2} \right) = \frac{2}{x^2}$$

$$\text{نکته دار} \rightarrow \left(\frac{3}{x} \right)' = \frac{-3}{x^2}$$

مثال

$$1) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} - x^2 + x - 0 \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} - 2x + 1$$

$$2) f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{x} \right) \left(x^2 + 2x - x + \frac{10,000}{3} - 9x^5 \right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} \right) \left(x^2 + 2x - x + \frac{10,000}{3} - 9x^5 \right) + \left(\sqrt{x} - \frac{3}{x} \right) (2x + 2 - 1 - 45x^4)$$

مثال

$$1) f(x) = (3x^2 + \sqrt{x} - 1)^5$$

$$f'(x) = 5(3x^2 + \sqrt{x} - 1)^4 \cdot \left(6x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$2) f(x) = (x^2 + x)^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = 2(x^2 + x) \cdot (2x + 1) \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right) + \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) (x^2 + x)^2$$

$$3) ((\sqrt{x})^5)' = 5(\sqrt{x})^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) f(x) = \sqrt{x^2 + x} = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \times (2x + 1)}{2}$$

مثال

$$1) g(x) = \frac{\sin x}{\cos x - x} = g'(x) = \frac{\cos x \cdot (\cos x - x) - (-\sin x - 1) \cdot \sin x}{(\cos x - x)^2}$$

$$2) f(x) = \cos x \cdot (1 + \tan x) \rightarrow f'(x) = (-\sin x)(1 + \tan x) + (1 + \tan^2 x)(\cos x)$$

$$3) (\text{Arc } \sin x) \cdot (\cot x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) (\cot x) + (-1 - \cot^2 x) (\text{Arc } \sin x)$$

$$4) \text{Arc } \tan x - \cot x + \frac{x}{2} - \sqrt{x} + 3x^2 = \frac{1}{1+x^2} - (1 + \cot^2 x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 6x$$

$$5) \frac{\text{Arc } \cos x - x + \sqrt{x} - \frac{1}{x}}{\text{Arc } \tan x + x^2 - 3x} = \frac{\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \right) (\text{Arc } \tan x + x^2 - 3x) - \left(\frac{1}{1+x^2} + 2x - 3 \right) (\text{Arc } \cos x - x + \sqrt{x} - \frac{1}{x})}{(\text{Arc } \tan x + x^2 - 3x)^2}$$

مثال

$$1) f(x) = (\tan^5 x)' = 5 \tan^4 x \times (1 + \tan^2 x) \times 1$$

$$2) f(x) = (\sin^3 \sqrt{x})' = 3 \sin^2 \sqrt{x} \times \cos \sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3) f(x) = \left(2 \cos^3 \frac{1}{x} \right)' = 6 \cos^2 \frac{1}{x} \times \left(-\sin \frac{1}{x} \right) \times \frac{-1}{x^2}$$

مثال

$$1) (e^x + 1)' = e^x + 0 = e^x$$

مثال

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= (e^{\sin x + \sqrt{x}})' = (\sin x + \sqrt{x})' \times e^{\sin x + \sqrt{x}} \\ &= (\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}}) \times e^{\sin x + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) f(x) &= \left(\frac{e^x + \sqrt{x}}{1 - x + x} \right)' \\ &= \frac{\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) (1 - x + x) - (e^x + \sqrt{x}) (-1 + 1)}{(1 - x + x)^2} \end{aligned}$$

مثال

$$\begin{aligned} 1) & \left(\ln x + e^x + \sqrt{x} - \frac{1}{x} + x - \tan x + 3x^2 - 9 \right)' \\ &= \frac{1}{x} + e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + 1 - (1 + \tan^2 x) + 6x - 0 \end{aligned}$$

مثال

$$1) (\ln \sqrt{x})' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$2) (\ln \sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$3) (\ln \underbrace{e^x + \cos \sqrt{x}}_u) = \frac{(e^x - \sin \sqrt{x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{e^x + \cos \sqrt{x}}$$

u'

تمرین:

$$1) (a^4 + 2)^2 = a^8 + 4a^4 + 4$$

$$2) (a^8 - 3)(a^8 + 3) = a^{16} - 9$$

$$3) (x + x^2)(x - x^2) = x^2 - x^4$$

$$4) (2x + 5)(2x + 1) = 4x^2 + 12x + 5$$

$$5) (y - 2)^3 = y^3 + 3(y^2)(-2) + 3(-2)^2(y) - 8 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$$

$$6) (y + x)(y^2 - yx + x^2) = y^3 + x^3$$

$$7) (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 + 27$$

$$8) (a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1) = a^6 - 1$$

تمرین:

$$1) x^2 - x - 30 = (x - 6)(x + 5)$$

$$2) 8a^3 - 125 = (2a - 5)(4a^2 + 10a + 25)$$

$$3) a^3 - 27 = (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$$

$$4) 2x^3 - x^2 + x = x(2x^2 - x + 1)$$

تمرین فاکتورگیری:

$$1) 28x^3 - 63x = 7x(4x^2 - 9) = 7x(2x - 3)(2x + 3)$$

$$2) \frac{\cancel{x^2} \times 64}{\cancel{x^2} \times x} = \frac{64}{x}$$

$$3) \frac{(x^2)(6x+5)}{x^2+1} = (6x+5) \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)$$

تمرین معادلات:

1) $x^2 - 8x + 15 = 0$ $a = 1$ $b = -8$ $c = 15$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(15) = 64 - 60 = 4 > 0$ دو ریشه دارد

$$x_1 \text{ و } x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2(1)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8+2}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{8-2}{2} = 3 \end{cases}$$

$(x-3)(x-5) = 0$ $x-3=0$ $x=3$ $x-5=0$ $x=5$ روش تجزیه:

$(3)^2 - 8(3) + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$ و $(5)^2 - 8(5) + 15 = 25 - 40 + 15 = 0$ امتحان:

2) $x^2 + 8x + 12 = 0$ $a=1$ $b=8$ $c=12$ $\Delta=b^2-4ac=(8)^2-4(1)(12)=64-48=16 > 0$ دو ریشه دارد

$$x_1 \text{ و } x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2(1)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-8+4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-8-4}{2} = -6 \end{cases}$$

$(x+6)(x+2) = 0$ $x+6=0$ $x=-6$ $x+2=0$ $x=-2$ روش تجزیه:

$(-2)^2 + 8(-2) + 12 = 4 - 16 + 12 = 0$ و $(-6)^2 + 8(-6) + 12 = 36 - 48 + 12 = 0$ امتحان:

3) $2x^2 - 50 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 25 = 0$ $a = 1$ $c = -25$ $\Delta = b^2 - 4ac = -4(1)(-25) = 100$ روش دلتا:

$$\Delta = 100 > 0 \text{ دو ریشه دارد} \quad x_1 \text{ و } x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\pm \sqrt{100}}{2(1)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

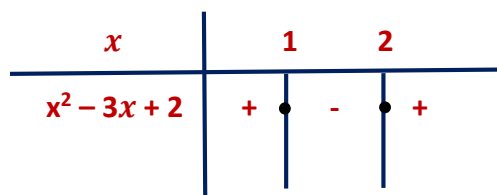
$2(x^2 - 25) = 0$ $2(x-5)(x+5) = 0$ $x-5=0$ $x=5$ $x+5=0$ $x=-5$ روش تجزیه:

$2(5)^2 - 50 = 50 - 50 = 0$ و $2(-5)^2 - 50 = 50 - 50 = 0$ امتحان:

تمرین تعیین علامت:

$$1) 16 - 4x = 0 \quad -4x = -16 \quad x = 4$$

$$2) x^2 - 3x + 2 \leq 0 \quad (x-2)(x-1) \leq 0 \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x-1=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}$$



$$x = [1 \text{ و } 2]$$

تمرین

دامنه و برد را بیابید.

$$1) x^2 + x + 2 = 0 \quad \textcircled{1} R_f \cong R \quad \textcircled{2} D_f = R$$

$$2) x^5 - x^9 = 0 \quad \textcircled{1} R_f \cong R \quad \textcircled{2} D_f = R$$

$$3) 2x + 1 = 0 \quad \textcircled{1} R_f \cong R \quad \textcircled{2} D_f = R$$

$$4) \frac{\sqrt{x-2}}{x-4} \quad \textcircled{1} R_f \cong R \quad \textcircled{2} D_f: x-2 \geq 0 \quad x \geq 2$$

↑
صورت

$$\textcircled{3} D_f: x-4=0 \quad x=4 \quad D_f = \left\{ x \mid x \geq 2 \text{ و } x \neq 4 \right\}$$

↑
مخرج

$$5) \frac{x^2+5}{\sqrt{\frac{x-5}{g(x)>0}}} \quad g(x) > 0 \quad x-5 > 0 \quad x > 5$$

$$\textcircled{1} R_f \cong \mathbb{R} \quad \textcircled{2} D_f = \{x \mid x > 5\} = (5, +\infty)$$

$$6) \frac{\sqrt{x+4}}{2x+4} \quad \textcircled{1} R_f \cong \mathbb{R} \quad \textcircled{2} D_f: x+4 \geq 0 \quad x \geq -4$$

↑
صورت

$$\textcircled{3} D_f: 2x+4=0 \quad 2x=-4 \quad x=\frac{-4}{2}=-2$$

↑
مخرج

$$D_f = \{x \mid x \geq -4 \text{ و } x \neq -2\}$$

تمرین

$$1) \frac{x^2+x-1}{\sqrt{2x+3}} \quad R_f \cong \mathbb{R} \quad D_f: 2x+3 > 0 \quad 2x > -3 \quad x > \frac{-3}{2} \quad D_f = \left\{x \mid x > \frac{-3}{2}\right\}$$

$$2) \frac{\sqrt{x-7}}{\sqrt{x-6}} \quad R_f \cong \mathbb{R} \quad D_f: x-7 \geq 0 \quad x \geq 7 \quad D_f: x-6 > 0 \quad x > 6 \quad D_f = [7, +\infty)$$

↑
صورت

↑
مخرج

$$3) \frac{\sqrt{x-5}}{x+2} \quad R_f \cong \mathbb{R} \quad D_f: x-5 \geq 0 \quad x \geq 5 \quad D_f: x+2=0 \quad x=-2$$

↑
صورت

↑
مخرج

$$D_f = \{x \mid x \geq 5\} \text{ یا } [5, +\infty)$$

$$4) \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} \quad R_f \cong R \quad D_f: x-1 \geq 0 \quad x \geq 1 \quad D_f: x > 0 \quad D_f = [1, +\infty)$$

↑
صورت
↑
مخرج

$$5) \frac{101\sqrt{x+\frac{2}{3}}}{78\sqrt{x-\frac{1}{2}}} \quad R_f \cong R \quad D_f = R \quad D_f: x - \frac{1}{2} > 0 \quad x > \frac{1}{2} \quad D_f = \left\{ x \mid x > \frac{1}{2} \right\} \text{ یا } \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

↑
صورت
↑
مخرج

تمرین توابع Log

توابع زیر را بیابید.

$$1) 10\log_c(ab) = 10\log_c a + 10\log_c b$$

$$2) 10\log 15 = 10\log 5 + 10\log 3$$

$$3) 10\log_c \frac{a}{b} = 10\log_c a - 10\log_c b$$

$$4) 10\log 5 = 10\log \frac{10}{2} = 10\log 10 - 10\log 2 = 10 - 10\log 2$$

$$5) 10\log \frac{a^n}{b^m} = \frac{n}{m} 10\log \frac{a}{b}$$

$$6) 10\log 27 = 10\log 9 + 10\log 3$$

$$7) 10\log \frac{1000}{100} = 10\log \frac{10^3}{10^2} = \frac{3}{2} 10\log \frac{10}{10} = \frac{30}{2} = 15$$

تمرین

حاصل توابع را بدست بیاورید.

$$1) \sin 0 = 0$$

$$2) \cos \frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4) \cos 0 = 1$$

$$5) \sin 2\pi = \sin 360^\circ = 0$$

$$6) \sin \frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$7) \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{Arc sin } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$8) \cos \frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$9) \cos^{-1} \frac{1}{2} = \text{Arc cos } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

تمرین

$$F(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$x \rightarrow 0$$

تمرین

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 1}{x^3 + 2x - 1} = \frac{3(1)^3 - 1}{1^3 + 2(1) - 1} = \frac{2}{1 + 2 - 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x} = \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow 4$$

$$\text{رفع ابهام} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 4}{(4 - x)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\cancel{x - 4}}{-(-\cancel{4} + x)(\sqrt{x} + 2)} \quad x = 4 \Rightarrow \frac{1}{-\sqrt{4} - 2} = \frac{1}{-2 - 2} = \frac{1}{-4}$$

$\uparrow$
 $x - 4$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4} = \frac{4 - 4}{(4)^2 - 5(4) + 4} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow 4$$

$$\text{رفع ابهام} \Rightarrow \frac{\cancel{x - 4}}{(x - 1)(\cancel{x - 4})} \quad x = 4 \Rightarrow \frac{1}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

تمرین:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^6} = \frac{-1}{(-0,1)^6} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{2x^2+4} = \frac{+\infty-3}{2(+\infty)^2+4} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\text{رفع ابهام} \quad \frac{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x \left(2x + \frac{4}{x}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{x}}{2x + \frac{4}{x}} = \frac{1 - \frac{3}{+\infty}}{2x + \frac{4}{+\infty}} = \frac{1-0}{2x+0} = \frac{1}{2(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 8x + 3) = (5(-\infty)^3 - 8(-\infty) + 3) = -\infty + \infty \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow -$$

$$\text{رفع ابهام} \quad x(5x^2 - 8 + \frac{3}{x}) = -\infty(+\infty - 8 + \frac{3}{-\infty}) = -\infty(+\infty + 0) = -\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x}{3 - 2x^2} = \frac{(-\infty)^2 + 3(-\infty)}{3 - 2(-\infty)^2} = \frac{+\infty - \infty}{-\infty} \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\text{رفع ابهام} \quad \frac{x^2(1 + \frac{3}{x})}{x^2(\frac{3}{x^2} - 2)} = -\frac{1}{2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 3} = \frac{4(+\infty)^3 - 7(+\infty) + 1}{2(+\infty)^2 + 3} = \frac{+\infty - \infty}{+\infty} \quad \text{مبهم}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\text{رفع ابهام} \quad \frac{x^2(4x - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(2 + \frac{3}{x^2})} = \frac{4x}{2} = 2x = 2(+\infty) = +\infty$$

تمرین: مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f(x) در نقطه مذکور پیوستگی داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & ; \quad x \geq 1 \\ 2ax - 3b & ; \quad x < 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} ax^2 + bx - 1 = a + b - 1 \\ x \rightarrow 1 \end{matrix}$$

نقطه مذکور

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx - 1 = a + b - 1$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$2) \lim 2ax - 3b = 2a - 3b$$

$$x \rightarrow 1^-$$

$$a + b - 1 = a + b - 1$$

↑
معادله اول

$$2a - 3b = a + b - 1$$

معادله دوم

$$a - 4b = -1$$

تمرین

$$1) Z: (2x^3 + 7x - 2) \left(x^{15} - 4x^5 + \frac{20}{2}x \right)$$

$$Z' = (6x^2 + 7) \left(x^{15} - 4x^5 + \frac{20}{2}x \right) + (15x^{14} - 20x^4 + \frac{20}{2}) (2x^3 + 7x - 2)$$

$$2) S: 2x^7 - 7x^9 + 6x - \frac{7}{2}x - \pi + \sqrt{2} + 1$$

$$S' = 14x^6 - 63x^8 + 6 - \frac{7}{2}$$

$$3) \left(\frac{x^7 + 6x^2 - \pi}{2x^2 + 5} \right)'$$

$$\frac{(7x^6 + 12x)(2x^2 + 5) - (4x)(x^7 + 6x^2 - \pi)}{(2x^2 + 5)^2}$$



تمرین

$$1) f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)} = (x^2 - x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (x^2 - x)^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 1)$$

$$2) f(x) = \sqrt{(x^4 + \frac{1}{x})} = (x^4 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^4 + \frac{1}{x})^{-\frac{1}{2}} \times (4x^3 - \frac{1}{x^2})$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 + x} = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \times (2x + 1)$$

تمرین

$$1) f_1'(x) = 3 \cos x - x \sin x \quad f_1'(x) = 3(-\sin x)(1) - ((1)(\sin x) + (\cos x)(x))$$

$$2) f_2'(x) = e^x \sin^3 x \quad f_2'(x) = e^x(\sin^3 x) + (3\sin^2 x(\cos x)(1))(e^x)$$

$$3) f_3'(x) = x^3 \ln x \quad f_3'(x) = 3x^2(\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)(x^3)$$

$$4) f_4'(x) = e^x \sin 2x \quad f_4'(x) = e^x(\sin 2x) + (\cos 2x)(2)(e^x)$$

$$5) f_5'(x) = (x^2 + x)(e^x + 1) \quad f_5'(x) = (2x + 1)(e^x + 1) + (e^x)(x^2 + x)$$

$$6) f_6'(x) = e^x \cos e^x \quad f_6'(x) = (e^x)(\cos e^x) + (-\sin e^x)(e^x)(e^x)$$

$$7) f_7'(x) = \tan(2x + 1) \quad f_7'(x) = (1 + \tan^2(2x + 1))(2)$$

$$8) f_8'(x) = \ln(\cos 2x)$$

$$f_8'(x) = \frac{(-\sin 2x)(2)}{\cos 2x}$$

$$9) f_9'(x) = \cos(\ln x)$$

$$f_9'(x) = (-\sin(\ln x)) \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$10) f_{10}'(x) = (3x - x^3)^5$$

$$f_{10}'(x) = 5(3x - x^3)^4(3 - 3x^2)$$

$$11) f_{11}'(x) = (x^2 + 1)^5(x^3 - x)^4$$

$$f_{11}'(x) = 5(x^2 + 1)^4(2x)(x^3 - x)^4 + 4(x^3 - x)^3(3x^2 - 1)(x^2 + 1)^5$$

$$12) f_{12}'(x) = (2 + \ln x)(e^x + 3)$$

$$f_{12}'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(e^x + 3) + (e^x)(2 + \ln x)$$

قانون ها

حدهای بی نهایت (∞) :

بی نهایت یک عدد مشخص نمی باشد و عدد خیلی خیلی بزرگی می باشد.

$$1) \frac{a}{0^+} \begin{matrix} \text{عدد} \\ \text{حدی} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} +a \\ -a \end{matrix} \quad \frac{-7}{0^+} = -\infty \quad \frac{6}{0^+} = +\infty$$

$$2) \frac{a}{0^-} \begin{matrix} \text{عدد} \\ \text{حدی} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} +\infty & a < 0 \\ -\infty & a > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} -a \\ +a \end{matrix} \quad \frac{-1000}{0^-} = +\infty \quad \frac{99}{0^-} = -\infty$$

ادامه ی قوانین حد (مبهم)

$$3) a \times (+\infty) \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$$

$$4) a \times (-\infty) \begin{cases} -\infty & a > 0 \\ +\infty & a < 0 \end{cases}$$

قوانین حفظی

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$0 \cdot (+\infty) = \text{مبهم}$$

$$a \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$a - \infty = -\infty$$

$$+\infty - \infty = \text{مبهم}$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$0 \cdot (-\infty) = \text{مبهم}$$

$$\frac{\pm \infty}{\pm \infty} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

قوانین مهم و پر کاربرد و حفظی مشتق:

قانون اول) مشتق اعداد ثابت برابر صفر است.

عدد ثابت
↓
1) $f(x) = c \longrightarrow f'(x) = 0$

عددی که ضریب انگلیسی و متغیر نداشته باشد = عدد ثابت

قانون دوم) مهم ترین قانون مشتق و کلید مشتق می باشد. قانون مشتق توابع توان دار می باشد که توان در ضریب ضرب می شود و یک عدد از توان کم می شود.

$$2) f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

قانون سوم) قانون جمع و تفریق مشتق که به صورت یا برابر است با مشتق اول $\pm$ مشتق دوم و

$$3) (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

تابع دوم تابع اول

$$f'(x) = \frac{28}{9}x + 10x + 3x^2$$

قانون چهارم) مشتق قانون ضرب که مشتق تابع اول ضرب در تابع دوم + مشتق تابع دوم در تابع اول.

$$4) (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

قانون پنجم) مشتق توابع کسری که عبارت است از مشتق صورت ضرب در مخرج - مشتق مخرج در صورت بر روی مخرج به توان دو.

$$5) \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

قانون ششم)

$$6) f(x) = \sqrt[2]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{اثبات} \rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قانون هفتم)

$$7) f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\text{اثبات} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

قانون هشتم)

$$8) (u^n)' = n u^{n-1} \cdot u'$$

تابع u بر حسب u'

$$f(x) = u$$

ادامه قانون ها

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x$$

$$11) (\tan x)' = (1 + \tan^2 x)$$

$$12) (\cot x)' = -(1 + \cot^2 x)$$

$$13) (\text{Arc } \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) (\text{Arc } \cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15) (\text{Arc } \tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16) (\text{Arc } \cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

ادامه قانون های مشتق

$$17) \text{ مشتق کمان } \times \text{ مشتق نسبت } \times \text{ مشتق توان} = (\text{مشتق مثلثاتی کلی})$$

$$18) (e^x)' = e^x$$

خودش = تابع نهایی

$$19) (e^u)' = u' \times e^u \quad u \text{ تابع جداگانه بر حسب } x \text{ می باشد.}$$

$$20) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$21) (Lnu)' = \frac{u'}{u} \quad \text{تابع بر حسب } x$$

نمونه سوال امتحانی

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x} + \ln x - e^x + \sqrt{x} - \sin x + 2x^3 - x + 1 + \pi \right)'$$
$$= 4x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x + 6x - 1 + 0 + 0$$



امتحانات نیمسال اول 1403 - 1404

نام درس:

تاریخ برگزاری امتحان:

نام استاد:

ساعت برگزاری امتحان:

مدت زمان برگزاری امتحان:

استاد محترم: لطفاً سوالات امتحانی را ترجیحاً تایپ نموده و بارم هر سوال را مقابل آن درج نمایید. تعداد صفحات سوال:

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: رشته: مقطع:

1- حل کنید؟

1) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) = ?$

2) $a^5 + b^5 = ?$

3) $\frac{x^1 - 2}{3} + \frac{2x + 1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{6x - 1}{6} = ?$

2- دامنه و برد بیابید

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-5}$

2) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

3- حد بگیرید و رفع ابهام کنید؟

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 1}{x^3 + 2x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$

4- مقادیر a و b را چنان یقین کنید که f در x_0 پیوسته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{و } x_0 > -2 \\ 5 & \text{و } x_0 = -2 \\ bx^2 + 2x & \text{و } x_0 < -2 \end{cases}$$

5- مشتق بگیرید؟

1) $((x^5 + x^2)(x - 1))'$

2) $(\sqrt{x^2 + x})'$

3) $(\frac{\sin x}{\cos x - x})'$

3) $(2 \cos^3(\frac{1}{x}))'$

4) $(\tan(2x + 1))'$

5) $((\sqrt{x} + \frac{2}{x})(x^2 + 2x - 1 + \pi))'$



امتحانات نیمسال اول 1403 - 1404

نام درس:

تاریخ برگزاری امتحان:

نام استاد:

ساعت برگزاری امتحان:

مدت زمان برگزاری امتحان:

استاد محترم: لطفاً سوالات امتحانی را ترجیحاً تایپ نموده و بارم هر سوال را مقابل آن درج نمایید. تعداد صفحات سوال:

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: رشته: مقطع:

1- دامنه بیابید؟

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x-7}$$

2- حد بگیرید؟

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 8x + 1)$$

3- مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)$ در نقطه x پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{و } x > -2 \\ 5 & \text{و } x = -2 \\ bx^2 + 2x & \text{و } x < -2 \end{cases}$$

4- مشتق بگیرید؟

$$1) f(x) = (x^2 + x - 1)^3 \left(x - \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)$$

$$2) f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - x}$$

$$3) f(x) = \cot \sqrt[3]{x}$$

$$4) f(x) = e^x + \sqrt{x} - 3x^2 + 9x - x^7 + \pi$$

$$5) f(x) = \left(e^x + \frac{1}{x}\right)^2 (\ln x)$$

$$6) f(x) = (\sqrt{x^2 + x}) \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x} - x^2 + 2\right)$$

$$7) f(x) = \cos \Rightarrow f^{(10)}(x) = ?$$

5- هوپیتال بزنید؟

$$1) \lim_{M \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{M - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$



امتحانات نیمسال اول 1404 - 1403

نام درس:

تاریخ برگزاری امتحان:

نام استاد:

ساعت برگزاری امتحان:

مدت زمان برگزاری امتحان:

استاد محترم: لطفاً سوالات امتحانی را ترجیحاً تایپ نموده و بارم هر سوال را مقابل آن درج نمایید. تعداد صفحات سوال:

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: رشته: مقطع:

1- دامنه و برد بیابید؟

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x-7}}{x-5}$

2) $\frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x-1}}$

2- حد بگیرید؟

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$

3- مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطه مذکور پیوسته باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{و} & x > -2 \\ 5 & \text{و} & x = -2 \\ bx^2 + 2x & \text{و} & x < -2 \end{cases}$$

4- مشتق بگیرید؟

1) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} - x^2 + x + 2x^{10} - e^x + \ln x \Rightarrow f'(3) = ?$

2) $\left(\frac{\sin x + x}{\cos x - x} \right)'$

3) $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$

4) $f(x) = (x^2 + 1)^5 (x^3 - x)^4$

5) $f(x) = (2, 7 + \ln x - e^x - \cot x)(\cos x + 9x)$

5- هوییتال بزنید؟

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x - 14}{4x + 9}$



امتحانات نیمسال اول 1403 - 1404

نام درس:

تاریخ برگزاری امتحان:

نام استاد:

ساعت برگزاری امتحان:

مدت زمان برگزاری امتحان:

استاد محترم: لطفاً سوالات امتحانی را ترجیحاً تایپ نموده و بارم هر سوال را مقابل آن درج نمایید. تعداد صفحات سوال:

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: رشته: مقطع:

1- دامنه و برد بیابید؟

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x^2-16}$

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-6}}$

2- حد بگیرید؟

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3-7x+1}{2x^2+3}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-3x)$

3- مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع در نقطه مورد نظر پیوسته باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2bx & \text{و } x < 2 \\ 3 & \text{و } x = 2 \\ -2ax - 3b & \text{و } x > 2 \end{cases}$$

4- مشتق بگیرید؟

1) $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{6}{x} - x)^3 \cdot (x^5 + e^x - \ln x)$

2) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-x)}$

3) $f(x) = \frac{\sin x + \tan x - x^5 + \frac{1}{x}}{\cos x - x + 9x - \pi}$

4) $f(x) = (3 \cos^4 \sqrt{x}) \cdot (\tan^6 x)$

5) $(\ln \tan x)' \Rightarrow f^{(4)}$

5- هوییتال بزنید؟

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

جهت دانلود و دریافت جزوات و نمونه سوالات و اطلاع از راههای ارتباطی با
بنده، QR Code زیر را اسکن کنید:



Scan Me!

با آرزوی موفقیت
دکتر محمد سخا
www.DrSakha.ir