

$$3a^2y \cdot 2ay^3 = 12a^3y^4$$

$$\frac{-2abc^2}{15a^2b^2} = \frac{-1}{2} \frac{c^2}{a^2b}$$

$$\frac{-2a^2b^2}{10abc} = \frac{a^2b}{5c}$$

$$(a^2-1)(a+2) = (a^2-2a^2)(-a-2)$$

$$\frac{a^2 \cdot 2a^2 + a}{a} = a(a^2 \cdot 2a^2 + 1)$$

$$xy^2 + 2x - x + 2y + 2x^2y + 4 = 2x^2y + xy^2 + 2y + x + 4$$

$$(a-2)(a+2) = a^2 - 4$$

$$(a^2+4b^2)(a^2-4b^2) = a^4 - 16b^4$$

$$(a-1)(a+2) = a^2 + (2-1)a - 2 = a^2 + a - 2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \rightarrow a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a^2b + 2ab^2$$

← اتحاد مربع دو جمله‌ای

← اتحاد مزدوج

← اتحاد ملایب

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

انکسار ملکیات تفاضل ← (جاق ولائیر)

$$(a+a)(a+b) = a^2 + (a+b)a + ab$$

انکسار عمل مشترک ←

$$(a-a)(a+b) = a^2 + (a-b)a - ab$$

تقرین .

$$(2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$$

$$(a^4 - 1)(a^4 + 1) = a^8 - 1$$

$$\star (a-y)(a+y)(a^2+y^2) + (a^2+y^2)(a^4+y^4) =$$

$$(2n+2)(2n+1) = 4n^2 + 4n + 2$$

$$(y^3 - x^3)^3 = (y^3 - x^3)^2 (y^3 - x^3) = \frac{y^9 - x^9}{y^3 - x^3} = \frac{y^9 - x^9}{y^3 - x^3}$$

یہ از این مسائل تو می بینم ی آید .

$$(a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + b^3 + 4a^2b + 4ab^2 + 4a^2b^2)$$

$$a^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2} [(a-y)^2(y+z) + (y-z)^2(a+z) + (z-a)^2(a+y)]$$

اتحاد يك سری روابط اثبات شده كه برای آسان کردن کار از این استفاده می شود.

تجزیه رابطه برعکس اتحاد

ب. م. م. ن. بزرگترین مقوم علیه مشترک

$$14a^2bc^2 \cdot 1abc^2 = 1abc^2$$

$$12xyz, 7na = n \quad 3ab, 4m y^2 z = 1$$

$$1 - n^2 - 4n + 9 = (n - 2)^2 \quad 4 - 4n^2 - 4n^2 + 2n^2 = 2n^2(n^2 - 2n + 1)$$

$$2 - a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) \quad 7 - 21a^2 - 42a = 7a(4a^2 - 9) = 7a(2a - 3)(2a + 3)$$

$$2 - a^4 + 2a^2 - 42 = (a^2 - 7)(a^2 + 9)$$

$$1 = a^2 + 10a^2 + 22a^2 = a^2(a^2 + 10a + 22)$$

$$4 - 4a^2 - \frac{10a}{2} + 4 = (2a - 1)(2a - 5) + 10a + 22 = (a + 2)^2 = a^2(a + 2)^2$$

$$2 - 1a^2 - 12a = (2a - 2)(4a^2 + 10a + 22)$$

تقرین

$$1 - a^2 - 2v = (a - 2)(a^2 + 3a + 9)$$

$$2 - a^2 + 44y^2 = (a + 4y)(a^2 - 4ay + 16y^2)$$

$$2 - a^2 - 7a + 12 = (a - 3)(a - 4)$$

جمله

$$f = 3a^4 + 3a^3 : 3(a^4 + a^3) = 3(a^3) = 3a^3$$

$$\Delta = 9a^3 + 36a^3 - 4 = a(9a + 36a^3 - 1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad a_1, a_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a \quad b \quad c$$

$$a^2 - 2a + 4 = 0$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-1) = a^2 - 2a + 1$$

$$1 - 2a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$2 = 2a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$2 = a^2 + a^2 + 4 + 2 = 0$$

$$f = 2a^2 - 14 = 0$$

$$\textcircled{1} a=2 \quad b=4 \quad c=2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(2) = 16 - 16 = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 0}{4} = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$2(a^2 + 2a + 1) = (a+1)^2$$

$$\textcircled{2} a=2, b=3, c=2$$

$$\Delta = 3^2 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7$$

$$\text{جواب نادر} = 2(x^2 + 3x + 1)$$

$$\textcircled{3} a=1, b=1, c=3$$

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11$$

جواب نادر

$$\textcircled{4} a=2, b=0, c=-14$$

$$\Delta = 0^2 - 4(2)(-14) = 112$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{112}}{4} = \frac{\pm \sqrt{112}}{4}$$

$$2x^2 - 14 = 0$$

$$2x^2 = 14$$

$$x^2 = \frac{14}{2} = 7$$

$$\sqrt{112} = \sqrt{4 \times 28} = 2\sqrt{28}$$

$$x = \frac{\pm 2\sqrt{28}}{4} = \pm \sqrt{7}$$

$$\text{جواب نادر} = 2(x^2 - 7) \quad \text{یا} \quad 2(x-7)(x+7)$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 \quad a=2, b=4, c=2$$

کوینز

$$\Delta = 4^2 - 4(2)(2) = 16 - 16 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm 0}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\text{جواب نادر} = 2x^2 + 4x + 2 =$$

$$\frac{x+2}{2} + \frac{2x+1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{4x-1}{4}$$

$$2x+4+2x+1+2 = 4x-4x-1$$

$$2x+2x+4x-4x = -1+2-1$$

$$4x = 0$$

تایم راسنجی ای است که صرفاً هیچ ۲ زوج مکانیزی دارای مقدمات برابری نداشت باشد. اگر صرفاً اول

حکمی ها مساوی باشند صرفاً در دو کسری ها هم مساوی باشد.

$$A = \left[\begin{matrix} (1, 4) & (2, 4) & (3, 4) \end{matrix} \right] \text{ تابع هست}$$

$$B = \left[\begin{matrix} (5, 2) & (1, 3) & (0, 4) \end{matrix} \right] \text{ تابع نیست}$$

دامنه تابع: مجموعه ووی های یک تابع دامنه تابع گویند که با D_f نمایش داده می شود.

بر دامنه تابع: مجموعه خروجی های یک تابع برد تابع گویند که با R_f نمایش داده می شود.

$$a \xrightarrow{\text{ورودی}} \boxed{\frac{f_1}{f_2}} \xrightarrow{\text{خروجی}} R_f \text{ برد تابع}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{انواع تابع تک متغیره: ۱- چندضابطی:}$$

فلسه خطی ۴م: برداشته تابع طبق قدر و لا خود مرسوم R می باشد.

$$D_f = \{R, -\infty, +\infty\}$$

$$R_f = R$$

$$f^{-1} = \sqrt{x^2}$$

۲) مقابله ردیفی:

$$R_f = R \quad \text{بر برد} \quad R_f = R \quad \text{فرد} \quad n = 1 \quad \text{دامنه} \quad \text{۱۵}$$

$$PAPCO \quad \text{نوع} \quad D_f = ? \quad D_g - D_f$$

مثال: دامنه ی تابع های زیر بیابید و زوج و فرد بودن آن را مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۱) $f(x) = \sqrt{x+1} : x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$

$D_f = \{x \geq -1\} \quad R_f = \mathbb{R}$

۲) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} : D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$

۳) $f(x) = \sqrt[4]{x+7} : x+7 \geq 0 \rightarrow x \geq -7$

$D_f = \{x \geq -7\} \quad R_f = \mathbb{R}$

۴) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 7} : x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$

$D_f = \{(-\infty, +\infty) - \{7\}\}$

نکته: تا زمانی که صورت کسر رادیکالی نباشد به صورت طری نداریم ولی اگر رادیکال باشد باهاش کار داریم.

$\frac{x+4}{x^2+2x+4} : x^2+2x+4 = (x+1)(x+3) \rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = -3$

$D_f = \mathbb{R} - \{-3, -2\} \quad R_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-1} : x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \quad x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

$D_f = \mathbb{R} (3, +\infty) - \{1\} \quad R_f = \mathbb{R}$

$D(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-9}} : x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4 \quad x-9 \geq 0 \rightarrow x \geq 9$

$D_f = \{x \geq 9\} \quad R_f = \mathbb{R}$

تعریف

$$f(a) = \frac{\sqrt{a-d}}{a^x + a + 1} \rightarrow a = d \quad R_f = |R|$$

$$D_f = [a | a, d]$$

$$f(a) = \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}} \rightarrow a = 1 \quad a = 1, 0 \rightarrow 2 \quad a = -1$$

$$D_f = a, 1 \quad R_f = |R|$$

$$f(a) = \frac{a-1}{\sqrt{a+d}} = a + d, 0 \rightarrow a = -d \quad R_f = |R|$$

$$D_f = [a | a, -d]$$

تابع متغیر:

$$\frac{a_1}{a_2} \left[\begin{array}{c} f_1 \\ f \end{array} \right] \frac{y_1}{y_2}$$

تابع چندضابطه‌ای:

تابع دروغی: $|a|$

$$\begin{cases} a & a, 0 \\ -a & a, 0 \end{cases}$$

$$[-1, 1] = 1$$

تابع چندضابطه‌ای: $|a|$ است که عدد ربه یک واحد عمیق بری دارد

$$r = 1 \quad \log_a r = r$$

تابع لگاریتمی:

نکته: لگاریتم بر خلاف تابع لگاری است

$y = e^x$ $\log a e = \ln a$

تابع نمایی: e

$\sin a - \cos a$

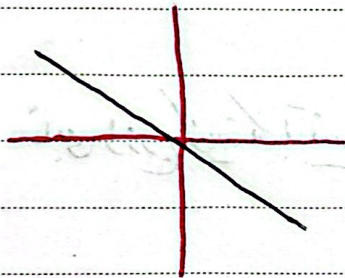
تابع مثلثاتی:

$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$

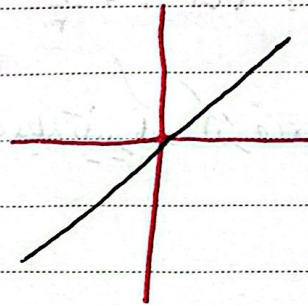
$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$

* رسم نمودارها:

$y = -x$

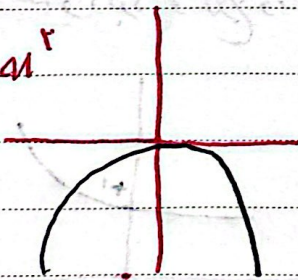


$y = x$

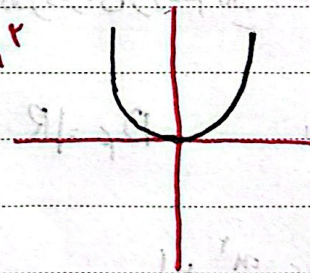


۱- نمودار خطی

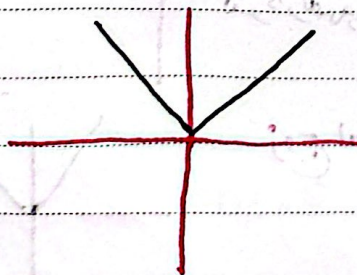
$y = -x^2$



$y = x^2$

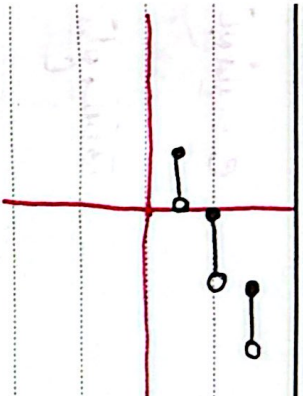


۲- نمودار سهمی

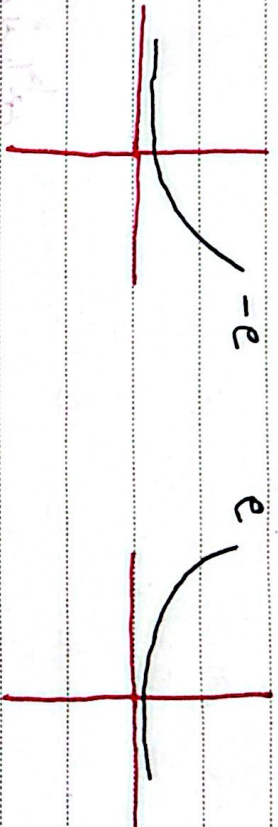


۳- نمودار مطلق: تابع قدر مطلق متفی ندارد.

۱۴- نمودار زیر صحیح یا نادرست:



۱۵- تابع گامی:



تابع مثلثی:

$$\sin \frac{\pi}{4} = 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

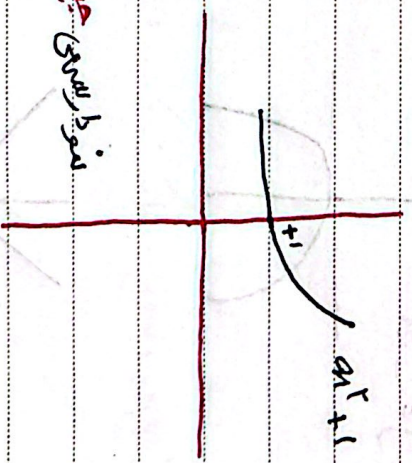
تابع زوج و فرد: تابعی را زوج می‌گویند یا فرد اگر $a_n = -a_n$ یا $a_n = a_n$ باشد. جمله a_n را می‌توانیم بنویسیم $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$.

می‌شود.

مثال: دایره و دایره و زوج و فرد بودن تابع زیر مشخص و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(a_n) = a_n^2 + 1 \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$$

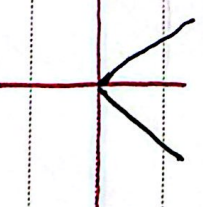
$$(-a_n)^2 + 1 = a_n^2 + 1 \quad \text{زوج است}$$



نمودار تابعی چون توان دارد.

$$f(a_n) = |a_n| \Rightarrow f(a_n) = |-a_n| = |a_n| \quad \text{زوج است}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$$



تقریب:

$$f(x) = \cos x \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R} \cdot [-1, 1]$$

زوج است

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x)$$

$$f(x) = |x| \cos x \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R} \cdot [0, +\infty)$$

زوج است

$$f(-x) = |-x| \cos(-x) = |x| \cos(x)$$

$$f(x) = x^3 \cdot \sin x \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R} \cdot [-\infty, +\infty]$$

فرد است

$$f(-x) = (-x)^3 \cdot \sin(-x) = -x^3 \cdot \sin x$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

صعودی و نزولی بودن تابع: تابع f را صعودی گوئیم هرگاه با افزایش x مقدار y افزایش یابد یا باقی

ماندگی گوئیم که با افزایش x مقدار y کاهش یابد

شیب یا بس نزولی

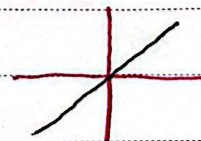
شیب بالا صعودی

صعودی و نزولی بودن توابع زیر را مشخص کنید

$$f(x) = \sin x$$

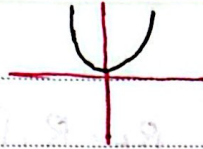
هم صعودی است هم نزولی

$$y = x + 1 \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$$



صعودی

$$y = x^2$$



لفظ دار لفظی

تقریب: ۱- دامنه ۲- برد ۳- صعودی و نزولی ۴- زوج و فرد ۵- رسم نمودار
زوج است.

$$1- f(x) = x^2 + |x| - 2$$

$$2- \frac{x^2 + 1}{x} \quad D_f = (0 - \infty) \cup (0, +\infty) \quad R_f = \mathbb{R}$$



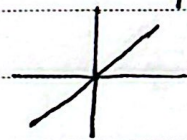
$$3- \sqrt{x} \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}_+ [0, +\infty)$$



زوج نه فرد نمودار خمیده

$$f = x \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$$

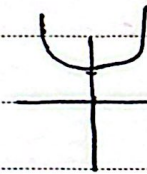
$$f(-x) = -x$$



صعودی و فرد است. خطی

$$4- x^2 + 3 \quad D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3$$



صعودی و زوجی

زوج است

ریاضی کاربردی: توابع چند متغیره: توابعی که بیش از یک متغیر تعریف شده (x) داشته باشد می گویند.

در ریاضی عمومی با توابعی آشنا شدیم که دامنه و برد تعریف آنها در مجموعه R بود ولی در توابع چند متغیره در ریاضی

کاربردی با توابع بیشتری آشنا می شویم که دامنه و برد آنها فراتر از R می باشد.

دامنه و برد توابع دو متغیره یا بیشتر می آید اما حوصله منق فقط دو متغیره

توان دامنه و برد از توابع متغیره محاسبه می شود.

نکته: تمام نقاط که برای توابع یک متغیر درس داده شد برای توابع چند متغیر هم صدق می کند.

if $n=1$ $\left\{ \begin{array}{l} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \mathbb{R} \end{array} \right.$ if $n=2$ $\left\{ \begin{array}{l} D_f = \mathbb{R}^2 \\ R_f = \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$

تعداد متغیر

if $n=n$ $\left\{ \begin{array}{l} D_f = \mathbb{R}^n \\ R_f = \mathbb{R}^n \end{array} \right.$

سوال امتحان:

1) $f(x, y) = x^2 + 2y + \sqrt{xy} - 4$
چند متغیر $\rightarrow$ $D_f = \mathbb{R}^2$ $R_f = \mathbb{R}^2$

2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y} - 19$
چند متغیر $\rightarrow$ $D_f = \{(x, y) \mid x^2 - 4y \geq 0\}$ $R_f = \mathbb{R}^2$

3) $f(x, y) = \frac{x^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$ $D_f = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ $R_f = \mathbb{R}^2$

توابع چند متغیر (جدایی):
 $\sqrt{x^2 - 4y} - 19 \rightarrow x^2 - 4y - 19 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4y \geq 19$
 $D_f = \{(x, y) \mid x^2 - 4y \geq 19\}$ $R_f = \mathbb{R}^2$

$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{xy} =$ $D_f = \mathbb{R}^2$ $R_f = \mathbb{R}^2$

توابع چند متغیر (سوی):

$\frac{x^2 - 4xy + y^2}{x^2 + y^2} =$ $x^2 + y^2 = 0$
 $D_f = \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه خارج}\}$
 $R_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = D_f = \mathbb{R}^2 - \{0\} \quad R_f = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y + z + w} D_f$$

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

$$R_f = \mathbb{R}^2$$

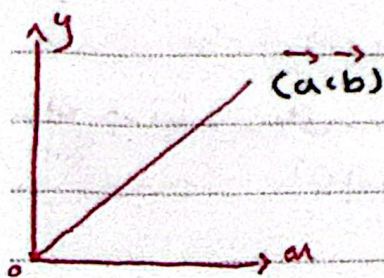
$$\cap = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 - \{0\} = \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

اول باید از همبستگی و منحرف جداگانه داشته باشیم

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

فصل سوم توابع برداری: آمدند در ترم دوم

توابع برداری هست که در ریاضی کاربرد دارد و یک سوال استخوان به خودش اختصاصی دهد توابع برداری



معنی است که علاوه بر اندازه دارای جهت هم دارد

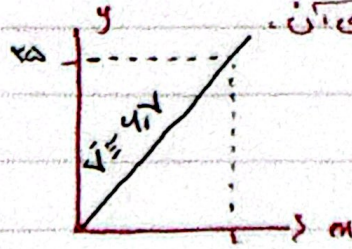
نماد تابع برداری $(\rightarrow, \rightarrow)$

$$|\vec{V}| = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow \text{فرمول محاسبه اندازه بردار}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= (a_1, b_1) \\ \vec{V}_2 &= (a_2, b_2) \end{aligned}$$

رابطه فیثاغورس مانند محاسبه اندازه بردار به همون تابع برداری

مثال : اندازه و جهت بردار و رسم صورتی آن :



$$\vec{v}_1 = (1, 3)$$

$$\vec{v}_2 = (3, 2)$$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

جمع بردارها : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (4, 5)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} = 4.71$$

تفریق بردارها : $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{b}_1 - \vec{b}_2)$

تقسیم بردار : $(\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2})$

وجود ندارد و تعریف نشده

نکته : بردارها فقط جمع و تفریق و ضرب در عدد و تقسیم ندارد .

عدد ثابت = C

بردار = $\vec{v}$

ضرب بردار :

$$(\vec{a}_1, \vec{b}_1) (\vec{a}_2, \vec{b}_2) \rightarrow (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2, \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)$$

① ضرب بردار : بردار $\times$ بردار

② ضرب اسکالر : عدد $\times$ بردار

عدد ثابت = C

$$C \vec{v} = (a_c, b_c) \quad C \neq 0 \quad (-\infty, +\infty) \Rightarrow$$

$$\vec{v} = (a_1, b_1)$$

C = 0 : ضرب اسکالر تعریف نشده است

+ هم جهت بردار یعنی عدد مثبت $C > 0$
- مخالف جهت بردار یعنی عدد منفی $C < 0$

مثال امتحانی مهم به جهت آورد

$$C = 2$$

$$\vec{V} = (2, 4)$$

$$2(2, 4) = (4, 8)$$

ضرب اسکالر

تعریف نشده چون یک بردار داریم و نیاز به دو بردار داریم

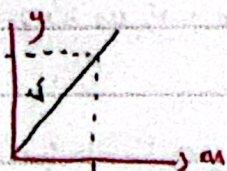
ضرب برداری

$$\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} =$$

اندازه بردار

هم جهت بردار چون عدد ثابت مثبت است

جهت بردار



رسم برداری بردار

آزمون به دوست آورد

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k} \\ \vec{V}_2 &= 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \\ C &= -4 \end{aligned}$$

$$\text{اندازه بردار} = \sqrt{5^2 + 1^2 - 5^2} = \sqrt{25 + 1 - 25} = \sqrt{1} = 1$$

اندازه بردار

جهت بردار مخالف جهت بردار

$$(2\vec{i} + 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{j} - 4\vec{k} - \vec{k}) = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$$

جمع بردار

$$(-\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k})$$

تفریق بردار

ت.ت.ت تقسیم بردار

$$4i - 6j + 4k$$

ضرب برداری

$$-20i - 4j + 20k$$

ضرب اسکالر

نقل جازم

ماتریس ها

هر آرایش مستطیل یا مربعی که شامل المراحقیق و شامل تعدادی سطروستون باشد را یک ماتریس

گویند که به صورت زیر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \end{matrix} \quad m$$

$[A] = \text{ماتریس } A$

↓ ↓ ↓
ستون اول ستون دوم ستون سوم
 n_1 n_2 n_3

در حالت کلی اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد، آن را $A_{m \times n}$ یا $[A]_{m \times n}$

گویند. به هر عضو یک ماتریس یک درجه گویند مثلاً درجه که در سطر ۱ و ستون ۱ قرار داشته باشد

به آن a_{ij} گویند. درجه a_{ij} درجه a_{ij} درجه a_{ij}

در ترمینان ماتریس: برای هر ماتریس مربعی (سطروستون برابر داشته باشد) یک عملیات تعریف می شود

$|A|$

که به آن Δ می گویند

همیشه Δ حقیقی مثبت می باشد چون Δ مطلق مثبت می شود.

فرمول های به Δ می نامند:

$$1) [A] = |A| = a$$

۱- Δ می نامند ماتریس مربعی 1×1

$$[2] = |2| = 2$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad |A| = ad - bc$$

۲- Δ می نامند ماتریس مربعی 2×2
به صورت ضربی با هم ضرب می کنند

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2$$

۳- Δ می نامند ماتریس مربعی 3×3

$$[A] = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix} = |A|$$

$$= a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$$

Δ می نامند ماتریس 3×3 و فرمول امتحان می افتد می یاد.

الگو دو سطر اول و سطر دوم یا سطر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{aligned} & (1 \times 5 \times 9) - (4 \times 1 \times 3) - (7 \times 2 \times 6) - (3 \times 5 \times 7) - (9 \times 1 \times 4) \\ & (9 \times 2 \times 4) = 45 - 12 - 84 - 105 - 36 - 36 \\ & = |-340| = 340 \end{aligned}$$

$$1) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = ad - cb = 15 - 8 = |7| = 7$$

$$2) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{aligned} & (-2 \times 3 \times 0) - (2 \times 2 \times 2) - (1 \times 1 \times -4) - (2 \times 3 \times -1) \\ & (-4 \times 2 \times -2) - (0 \times 1 \times 2) = -8 - 4 + 4 - 12 = -20 \\ & = \boxed{-20} \end{aligned}$$

انواع ماتریس های مهم و کاربردی در ریاضیات:

۱- ماتریس صفر ← ماتریسی که تمام درایه های آن صفر باشد

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

۲- ماتریس سطری ← ماتریسی که فقط یک سطر دارد

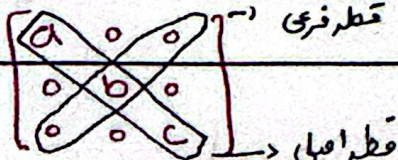
$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

۳- ماتریس ستونی ← ماتریسی که فقط یک ستون دارد

۴- ماتریس مربعی ← سطر و ستون آن برابر باشد

۵- ماتریس قطری ← ماتریس مربعی که تمام درایه آن به غیر از قطب اصلی صفر باشد.

PAPCO



Subject :

Date

۶. ماتریس اسکالر $\leftarrow$ ماتریس قطری که همه عناصر قطری اصلی با هم برابر باشد

$$\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}$$

۷. ماتریس همانی یا یک $\leftarrow$ واحد: ماتریس اسکالر که همه درایه آن عدد یک باشد.

عملیات (روی ماتریس):

۱. جمع و تفریق دو ماتریس: برای جمع و تفریق دو ماتریس دو شرط لازم دارد. هم مرتبه باشد $\leftarrow m_1 \times n_1 = m_2 \times n_2$

۲. درایه به درایه از هم کم و جمع کنیم.

$$C \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

۳. ضرب عدد در ماتریس:

کافی است عدد را تک تک درایه ها ضرب کنیم.

۳. ضرب ماتریس در ماتریس: برای ضرب دو ماتریس باید سطر اول در ستون اول و سطر دوم در ستون

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ | \end{bmatrix}$$

دوم و سطر سوم در ستون سوم ضرب کرد.

سؤال امتحان پایان ترم از حد و پیوستگی > دو متغیره میاد (n و y) ۲ نفره

$$\lim_{(n, y) \rightarrow (0, 0)} f(n, y) = \frac{n^2 y^2}{n + y}$$

حد به معنای مرسوم باشد که در ریاضیات عمومی حد تک متغیره درس داده شد که به صورت زیر تعریف

$$\lim_{n \rightarrow c} f(n) = L \quad \text{می شود؛}$$

تکمله؛ تعاریف توانی که در حد تک متغیره (ریاضی عمومی) از جمله رفع ابهام - حد بی نهایت و ... در

> دو متغیره هم صدق می کنند.

تعریف حد دو متغیره:

$$\lim_{(n, y) \rightarrow (a, b)} f(n, y) = L$$

شرط حد ← معادلی بیرون حد چپ با حد راست

مبهم ← $\frac{0}{0}$ ← رفع

عامل مبهم در صورت و مخبر شش سالی (ساده سازی) و حذف ی کمره

مراحل رفع ابهام
۱. تجزیه
۲. مزدوج
۳. فاکتورگیری

نکته: مزدوج یعنی یک عبارت که فقط علامت وسطش برعکس شده یعنی اگر تو یک عبارت مثل

$(a-1)$ علامت منفی داریم مزدوجش می شه $\leftarrow (a+1)$

نکته: چون وقتی عبارت رادیکالی توی صورت هست و حد به شکل $\frac{0}{0}$ در میاد ضرب در مزدوج باعث می شه رادیکال ها حذف بشن و عبارت ساده شه

مثال: حد بگیر بر ۲

$$1) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2 - 1}{n - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\text{رفع ابهام} = \text{از طریق تجزیه} \quad \frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)} = \lim_{n \rightarrow 1} (n+1) = 1+1 = \boxed{2}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\sqrt{n} - 1}{n - 1} = \frac{\sqrt{1} - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\text{رفع ابهام} = \text{از طریق مزدوج} \quad \frac{\sqrt{n} - 1}{n - 1} \times \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 1} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n} + 1} \quad n=1, \quad \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

حدهای بی‌نهایت: بی‌نهایت یک عدد خیلی بزرگ نامشخص هستش.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{+\infty}{\pm \infty} = \frac{0}{0} \quad \text{بیم}$$

تمرین رابن عمومی برای حدهای بی‌نهایت به صفحه ایدی اف حفظ شود.

از بین سه مثال زیر یکی از شما امتحانی هستش.

* سوال امتحان: حد بگیرد؟

$$1) \lim_{(n,y) \rightarrow (0,0)} f(n,y) = ?$$

$$f(n,y) = \frac{n^2 - y^2}{n^2 + y^2}$$

$$1) n=0 \rightarrow \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1$$

حد ندارد. $-1 \neq 1$

$$2) y=0 \rightarrow \frac{n^2 - 0}{n^2 + 0} = 1$$

$$2) \lim_{(n,y) \rightarrow (0,0)} f(n,y)$$

$$f(n,y) = \frac{n^2 y}{n^2 + y^2}$$

$$n=0 \rightarrow \frac{0}{0 + y^2} = 0$$

$$0 = 0$$

حد دارد.

$$y=0 \rightarrow \frac{n^2 \cdot 0}{n^2 + 0} = 0$$

$$۳) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$۱) x=0 \quad (0,0)$$

$$۲) y=0 \quad (0,0)$$

$$۳) y=x \quad (0,x)$$

$$۴) y=-x \quad (0,-x)$$

$$۵) y=mx \quad (0,mx)$$

$$۶) y=x^2 \quad (0,x^2)$$

فصل ششم

مشتق: نرخ تغییرات یک تابع را می‌رساند. منظور از مشتق یعنی یافتن خط مماس برای یک

منحنی و تعداد مشتق داریم $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تعریف ریاضی مشتق:

مهمترین قانون برای مشتق (قانون مشتق)

تکثیر قانون (چون می‌دهد اساد) - یعنی مشتق توان

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

مشتق مرتبه‌ی بالاتر: احتمال زیاد یاد دارید

$$f'(x) \rightarrow f''(x) \rightarrow f'''(x) \rightarrow f^{(n)}(x)$$

Subject:

Date

مثال های مهم امتحانی: مشتق مرتبه ی ۱۰۱ تابع زیر را بنویسید.

$$f(m) = 3m^3 + 2m^2 + m - \frac{1}{2} + \pi$$

$$f^{(101)}(m)$$

$$f'(m) = 9m^2 + 4m + 1 - 0 + 0$$

$$f''(m) = 18m + 4$$

$$f'''(m) = 18$$

$$f^{(4)} = 0$$

$$m < 0$$

$$f(101) = 0$$

مثال مهم امتحانی: مشتق مرتبه بیست و دوم $f^{(20)}(m)$ تابع زیر را بنویسید.

$$y = \sin m \rightarrow y' = \cos m \rightarrow y'' = -\sin m \rightarrow y''' = -\cos m$$

$$y^{(4)} = \sin m \rightarrow y^{(5)} = \cos m \rightarrow y^{(6)} = -\sin m \rightarrow y^{(7)} = -\cos m$$

مشتقات جزئی (ریاضی کاربردی) - مشتقات دو متغیره $f(x, y)$

تعریف مشتقات جزئی: هرگاه از یک تابعی دو متغیره همون دو متغیره به یک متغیره مشتق مشتق

ی بگیریم در این صورت مشتق جزئی نسبت به آن متغیره محاسبه می گردد و قوسین و فرمول هلی زیر برای

مشتقات جزئی بایه حفظ گردد و حتماً در امتحان نوشته شود.

فرمول مشتق جزئی نسبت به x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

نسبت به y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

همه در فرمول قرار بماند بنویس $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$

* ۳ مثال ۱) توامتحان می آید.

مشتق بگیرد ۲ نفره

$$f(x, y) = 3x^3 - 4y^4 + 7x^2y - 19$$

هرچی ایستاده مشتق بگیرد

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + 14xy$$

هرچی ایستاده مشتق بگیرد

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -16y^3 + 7x^2$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \sin(x^2 + y^2) - xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - 2x \sin(x^2 + y^2) - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2y \sin(x^2 + y^2) - x$$

$$F = e^{xy} - \arctan(3x^2 - 12xy)$$

این خیلی خیلی مهم تره

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y e^{xy} - \frac{(6x - 12y)}{1 + (3x^2 - 12xy)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x e^{xy} - \frac{12x}{1 + (3x^2 - 12xy)^2}$$

$$1. y = \ln a \rightarrow y' = \frac{a'}{a}$$

$$2. y = e^a \rightarrow y' = a' e^a$$

$$3. y = \cos a \rightarrow y' = -a' \sin a$$

$$4. y = \sin a \rightarrow y' = a' \cos a$$

$$5. y = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} u \rightarrow y' = \frac{u'}{1 + u'^2}$$

$$6. y = \operatorname{Arc} \operatorname{cotg} u \rightarrow y' = \frac{-u'}{1 + u'^2}$$

$$۲. y = \text{ARCSIN } u \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$۱. y = \text{ARCCOS } u \rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

اولین کاربرد مشتق توابع صریح تابعی به شکل $y = f(x)$ را صریح گوئیم.

$$y = a^2$$

$$y = \sin a + \cos a$$

دومین کاربرد مشتق: معادله و مشتق (رسم): معادله یک خط به صورت $y = ma + b$ نوشته می شود.

که m رشیب خط، a را تابع و a را ثابت و b را عرض خطی گوئیم.

$$y = ma + b \quad \text{معادله خط}$$

معادله یک خط را در امتحان می توان با در اختیار داشتن دو نقطه «روی خط» و یک نقطه و رشیب خط

بدست آورد.

$$\text{حالت اول: دو نقطه به ما داده} \quad \frac{y - y_1}{a - a_1} = \frac{y_2 - y_1}{a_2 - a_1}$$

$$\text{حالت دوم: یک نقطه و یک رشیب} \quad \frac{y - y_1}{a - a_1} = m \Rightarrow y - y_1 = m(a - a_1)$$

مثال امتحانی: (۲ نمره)

معادله خط معادله بدین شکل (m) در نقطه $a_1 = 4$ بدست آورد.

$$f'(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = m = f'(4)$$

$$m = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$y = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) = y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

قائم بر منحنی سوال بالا

$$y - y_1 = m(x - x_1) = y - 2 = -4(x - 4)$$

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$$

$$y = +2 - 4x + 16 \rightarrow y = -4x + 18$$

تدریس هم که تواناان احصال دره بیاد:

معادله خط مماس و قائم بر منحنی تابع $f(x) = x + e^x$ در نقطه $x_1 = 0$ بیست آورید.

$$f'(x) = x + e^x \quad f'(x_1) = 1 + e^{x_1} = m = f'(0) = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$$

$$y_1 = f(0) = 0 + 1 = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) = y - 1 = 2(x - 0)$$

$$y = +1 + 2x \rightarrow y = 2x + 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 0) \rightarrow y = +1 - \frac{1}{2}x = y = -\frac{1}{2}x + 1$$

قاعده هوییتال: ۱) ندره

قاعده مابین صر و مشتق: قاعده هوییتال قاعده بین صر و مشتق می باشد که اگر جواب ناممکن شد

صورت جدا و منفی جدا مشتق گرفته می شود در آخر عددی که x به دست آن میل کند حاصل ناری می گردد.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

نکته: امکان دارد یک بار مشتق گرفتن معطله باز معطله شود و باید تا جایی که معطله نشود مشتق گرفته شود.

مثال مهم امتحانی:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{2x + 2}{2x - 1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 2}{x + 2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \text{ مشتق}$$

$$\frac{(x)'(\ln x) + (\ln x)'(x)}{2x} = \frac{1(\ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)(x)}{2x} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \text{توجه به هست}$$

تعیین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x} \text{ داخل ضربه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + 1}{\sin^2 x - \cos^2 x + 1} \text{ داخل ضربه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1} \text{ داخل ضربه}$$

Subject :

Date

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x} = \frac{\sin^3(0)}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{زنجی (Indeterminate)}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\frac{\sin^3 x}{x} = \frac{\overset{\text{مشتق صورت}}{\sin^3 x} \cdot \overset{\text{مشتق مخبر}}{(x)}(1)}{x} = \frac{3 \cos^2 x}{x} = \frac{3 \cos^2(0)}{x} = \frac{3}{x}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x + 1}{\sin^3 x - \cos^3 x + 1} = \frac{\overset{0}{\sin^3(0)} - \overset{1}{\cos^3(0)} + 1}{\overset{0}{\sin^3(0)} - \overset{1}{\cos^3(0)} + 1} = \frac{0 - 1 + 1}{0 - 1 + 1} = \frac{0}{0}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\frac{\overset{\text{مشتق صورت}}{(\cos^3 x)(3)(1)} - (-\sin^3 x)(3)(1)}{\overset{\text{مشتق مخبر}}{(\cos^3 x)(3)(1)} - (-\sin^3 x)(3)(1)} = \frac{\overset{1}{(\cos^3(0))(3)(1)} - \overset{0}{(-\sin^3(0))(3)(1)}}{\overset{1}{(\cos^3(0))(3)(1)} - \overset{0}{(-\sin^3(0))(3)(1)}}$$

$$\frac{(1)(3)(1)}{(1)(3)(1)} = \frac{3}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^3 - x - 1} = \frac{1 - 3 + 1 + 1}{1 - 1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخبر}}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^3 - x - 1} = \frac{3(1) - 6(1) + 1}{3(1) - 1 - 1} = \frac{-2}{1}$$

$$x \rightarrow 1$$

ادامہ قراین مشتق:

1) $f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$

2) $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

3) $f(x) \pm g(x) = f'(x) \pm g'(x)$

4) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + (g'(x)) \cdot f(x)$

5) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$

$(x') = 1$

$(-x) = -1$

نکات:

6) $f(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

7) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

8) $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(\tan x)' = (1 + \tan^2 x)$

12) $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x)$

مستطمت مثلثی:

13) $\text{Arc sin } x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $\text{Arc cos } x' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $\text{Arc tan } x' = \frac{1}{1+x^2}$

PAPCO

16) $\text{Arc cot } x' = \frac{-1}{1+x^2}$

مفصل آخر انتگرال

انتگرال : هر تابعی که انتگرال استفاده های زیادی می شود انتگرال (و بی برای اختصار) اعداد به تابع

می باشد که محاسبه جابجایی مساحت، حد و دیگر مفاهیم کاربردی در ریاضیات و فیزیک را برهمه

دارد به طور کلی انتگرال یعنی محاسبه مساحت زیر نمودار که با علامت $\int$ نمایش داده

$$\int f(x) dx$$

می شود .

علامت
تابع

انتگرال ها به طور کلی به دو گونه ی معین و نامعین تقسیم می شود که تفاوت آنها به این صورت است

انتگرال معین به ما جواب عددی دهد و انتگرال نامعین به ما جواب تابعی دهد .

$$1) \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = c$$

$$2) \int f(x) dx = F(x) + C$$

نکته : برای جواب انتگرال در آخر جواب همیشه C + ثابت هست

قوانین مهم :

$$1) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

مشتق

$$\text{مثال : } \int x^2 dx = \int \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\text{مثال: } \int a^x dx = \frac{1}{x+1} a^{x+1} + C = \frac{1}{x} a^x + C$$

$$\text{مثال: } \int a^{2x} dx = \frac{1}{2x+1} a^{2x+1} + C = \frac{1}{2x} a^{2x} + C$$

نکته: در فرمول اول انتگرال (انتگرال های توان دار) می توانیم جواب را به صورت دیگری نوشته و یک

عدد به توان انتگرال اضافه کنیم.

قانون ۲) $\int a dx = \frac{a^2}{2} + C$

حفظ

قانون ۳) $\int k dx = kx + C$

$$\text{مثال: } \int 4 dx = 4x + C$$

$$\text{مثال: } \int 11 dx = 11x + C$$

$$\text{مثال: } \int dx = x + C$$

خیلی مهم

قانون ۴) $\int \frac{1}{a} dx = \ln a + C$

قانون ۵) $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx = k f(x) + C$

$$\text{مثال: } \int 5 x^3 dx = 5 \int x^3 dx = 5 \times \frac{x^4}{4} = \frac{5x^4}{4} + C$$

$$\text{مثال: } \int \frac{x^3}{3} dx = \frac{1}{3} \int x^3 dx = \frac{1}{3} \times \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{12} + C$$

$$\text{مثال: } \int \frac{1}{x} x^4 dx = \frac{1}{x} \int x^4 dx = \frac{1}{x} \times \frac{x^5}{5} + C = \frac{x^4}{5} + C$$

هذه مسائل بالاسفل ونسج الحسنة.

قانون 4) $\int (f(x) \pm g(x)) = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

$$\text{مثال: } \int x^{10} - x + x^2 = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$\text{مثال: } \int \textcircled{1} 2x + \textcircled{2} 3 + \textcircled{3} x^2 - \textcircled{4} \frac{1}{x} dx$$

$$1. \int 2x = 2 \times \frac{x^2}{2} = x^2 \quad 2. \int 3 = 3x \quad 3. \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

$$4. \int \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2}$$

$$\text{جواب آخر: } x^2 + 3x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\text{اثبات: } \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\text{مثال 2: } \int \frac{1}{x^3} + \sqrt{x} - x^2 + 2 - 3x$$

$$1. \int x^{-3} = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C = \frac{1}{-2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2} x^{-2} \quad 2. \int \sqrt{x} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$3. \int -x^2 = -\frac{x^3}{3} \quad 4. \int 2 = 2x \quad 5. \int -3x = -\frac{3x^2}{2}$$

$$\text{جواب آخر: } -\frac{1}{2} x^{-2} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{3x^2}{2} + C$$

$$\text{تقرین} = \int \sqrt[n]{a x} dx = \int a x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} a x^{\frac{1}{n} + 1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{n}{n}} a x^{\frac{1}{n} + \frac{n}{n}} + C = \frac{1}{\frac{1+n}{n}} a x^{\frac{1+n}{n}} + C = \frac{n}{1+n} a x^{\frac{1+n}{n}} + C$$

$$\text{قانون ۷} = \int e^{ax} dx = e^{ax} + C$$

$$\text{قانون ۸} = \int \sin ax dx = -\cos ax + C$$

$$\text{قانون ۹} = \int \cos ax dx = \sin ax + C$$

$$\text{قانون ۱۰} = \int \tan ax dx = -\ln |\cos ax| + C$$

$$\text{قانون ۱۱} = \int \cot ax dx = \ln |\sin ax| + C$$

$$\text{قانون ۱۲} = \int (1 + \tan^2 ax) dx = \tan ax + C$$

$$\text{قانون ۱۳} = \int -(1 + \tan^2 ax) dx = \cot ax + C$$

$$\text{قانون ۱۴} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$\text{مثال: } \int \sqrt[3]{x} + \sin x - e^x + \tan x + x^{\frac{5}{7}} dx$$

$$1 = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{7}} \quad 2 = -\cos x \quad 3 = e^x \quad 4 = -\ln |\cos x| \quad 5 = \frac{x^{\frac{7}{7}}}{\frac{7}{7}}$$

$$\text{جواب} = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{7}} - \cos x - e^x - \ln |\cos x| + \frac{x^{\frac{7}{7}}}{\frac{7}{7}} + C$$

$$\int \frac{1}{u} - u^2 + 4 \, du = u - \frac{u^3}{3} + 4u + C$$

$$\int -\sqrt{u} - u + du$$

$$\int \cot u - e^u + \ln 4 \, du = \ln |\sin u| - e^u + \frac{4}{u} + C$$

روش های انتگرال گیری: گاهی در حل انتگرال ها به انتگرال های بزرگ خوریم که شامل یک تابع و مشتق آن می توانیم آنرا از چارده قانون حل کردن جدا بکنیم روش های انتگرال گیری شماره اول کرد.

روش انتگرال تغییر متغیر: در این تابع u را به تابع T تبدیل می کنیم و آن ماه به روش شماره اول

قابل حل می شود و در آخر T را به u برمی گردانیم.

$$u+1=T \Rightarrow (u+1)^9 = T^9$$

مثال ①: $\int (u+1)^9 \, du$ (روش تغییر متغیر)

$$\int T^9 \, du = \frac{1}{9+1} T^{9+1} + C = \frac{1}{10} T^{10} + C = \frac{T^{10}}{10} + C = \frac{(u+1)^{10}}{10} + C$$

مثال ②: $\int (3u+2)^4 \, du$ $3u+2=T$

مشتق $3 \, du = 1 \, dT \rightarrow du = \frac{1}{3} dT$

$$\int = T \frac{1}{3} dT = \frac{1}{3} \int T^4 \, du = \frac{1}{3} \frac{T^5}{5} + C = \frac{1}{15} (3u+2)^5 + C$$

مثال ۳: $\int x^2 (x^2 + 1)^4 dx$ ، $x^2 + 1 = t$
 مشتق $\int 2x dx = dt$

$$\int (x^2 + 1)^4 \boxed{x^2 dx} = \int t^4 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^4 dt = \frac{1}{2} \frac{t^5}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^5}{10} + C$$

روش جزیه جز: با اسفاد از روش جزیه جز می توان انتگرال های بسیار دشوار را به انتگرال های

ساده تر تبدیل کرد این روش در انتگرال های به صورت $\int f(x) \cdot g(x) dx$ در مورد این

انتگرال ها صدق می کند کاربرد دارد که در آن تابعی باشد که پس از جزیه بار مشتق گرفتن جواب

صفری شود و تابعی باشد که بارهای توان از آن انتگرال گرفتن مانند توابع زیر:

• $\sin u, \cos u, \ln u, e^u, u^n$

فرمول مهم روش جزیه جز به صورت زیر می باشد:

مشتق: $d(uv) = u dv + v du$

انتگرال: $\int u dv = uv - \int v du$

مثال: $\int x \cos x dx$

جواب: $x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$

مثال : $\int \ln u \, du$

$$\text{جواب} = u \ln u - \int du = u \ln u - u + C$$

انتگرال معین : انتگرال هایی هستند که فرق آنها با انتگرال نامعین در جوابی باشد که انتگرال معین

از طریق آن چاره مانع می شود و در آخر جواب از طریق $f(u) - f(a) = \text{عدد}$ یابیم

$$\int_0^1 u^{\frac{1}{4}} du = \frac{u^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\frac{5}{4}} - \frac{0}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\int_0^2 e^u du = e^u \Big|_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - e^0 = 9 - 1 = 8$$

در اینجا e را در نقطه می گیریم